

Chapitre 1

Introduction

1. Objectif

Ce chapitre a pour objectif de présenter un rappel de quelques notions fondamentales sur les systèmes dynamiques et certains outils mathématiques indispensables pour la compréhension du reste de cours.

2. Définitions

2.1 Système

Un système est un ensemble d'objets interconnectés dans le but de réaliser une tâche spécifique. Un système communique avec l'extérieur par l'intermédiaire de grandeurs, fonction du temps appelés signaux.

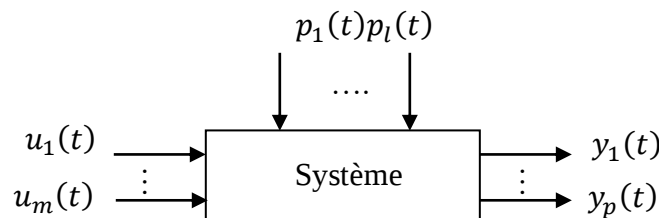


Fig 1.1 Schéma bloc d'un système

Parmi les grandeurs physiques mises en jeu dans un système, l'on peut distinguer :

a) Grandeurs d'entrée (grandeur exogène): une grandeur d'entrée est une grandeur qui agit sur le système, il en existe deux types :

- **Entrées maitrisables (ou simplement entrées $u_1(t), \dots, u_m(t)$):** excitations externes appliquées au système afin de contrôler l'évolution des grandeurs de sortie.
- **Entrées non maitrisables (perturbations $p_1(t), \dots, p_l(t)$):** grandeurs physiques imprévisibles pouvant s'opposer à l'action du système.

b) Grandeurs de sortie (réponses $y_1(t), \dots, y_p(t)$): grandeurs contrôlées par l'effet des entrées.

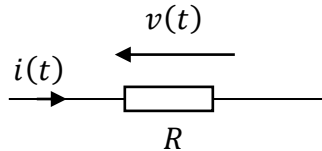
Avant d'envisager la commande d'un système, il est nécessaire d'établir un modèle traduisant le comportement de ce dernier. Modéliser un système consiste à élaborer un objet mathématique reliant l'entrée du système à sa sortie permettant de :

- 1- décrire et prédire le comportement du système en réponse à des excitations externes (entrées), c'est ce qu'on appelle l'étape *d'analyse*.
- 2- d'étudier et d'appliquer des techniques pour améliorer son comportement (ses réponses), c'est ce qu'on appelle l'étape de *synthèse* ou de *conception* de la loi de commande.

2.2 Systèmes statiques

Ce sont des systèmes décrits par des équations algébriques. La réponse de ces systèmes à une excitation extérieure (entrée) est instantanée. Le temps t (variable indépendante) n'intervient pas dans le fonctionnement de ces systèmes.

Exemple 1.1 : Résistance électrique pure $v(t) = Ri(t) \Rightarrow i(t) = \frac{1}{R} v(t)$



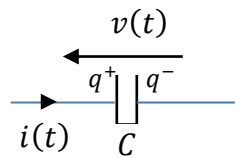
Entrée du système $u(t) = v(t)$: tension aux bornes de la résistance R .

Sortie du système $y(t) = i(t)$: courant qui traverse la résistance R .

2.3 Systèmes dynamiques

Ce sont des systèmes décrits par des équations différentielles. Ces systèmes ont une mémoire, c.-à-d. ont une réponse temporelle qui dépend de l'entrée présente mais également des réponses et/ou entrées passés.

Exemple 1.2 : condensateur électrique de capacité C



Entrée du système $u(t) = v(t)$: tension aux bornes du condensateur C .

Sortie du système $y(t) = q(t)$: charge du condensateur. $i(t)$ est l'intensité de courant.

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt, i(t) = \frac{dq}{dt}$$

Alors, la réponse est: $q(t) = q_0 + C v(t)$

où $q_0 = q(t = 0)$ est la charge du condensateur à l'instant initial.

2.4 Système linéaire

Un système est dit *linéaire* si les relations reliant ses entrées et ses sorties peuvent se mettre sous forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants. Les systèmes linéaires se caractérisent par les deux propriétés suivantes :

- **Proportionnalité**

Si $y(t)$ est la réponse du système à l'entrée $u(t)$, alors $\alpha y(t)$ est la réponse du système à l'entrée $\alpha u(t)$, où α est un scalaire.

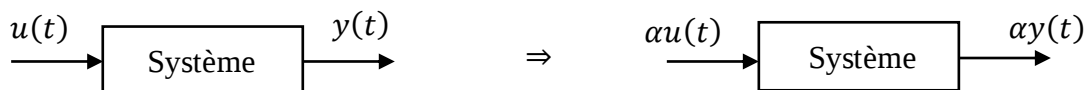


Fig.2 Principe de proportionnalité.

- **Additivité ou superposition**

Si $y_1(t)$ est la réponse du système à l'entrée $u_1(t)$ et si $y_2(t)$ est la réponse du système à l'entrée $u_2(t)$, alors $y_1(t) + y_2(t)$ est la réponse du système à l'entrée $u_1(t) + u_2(t)$.

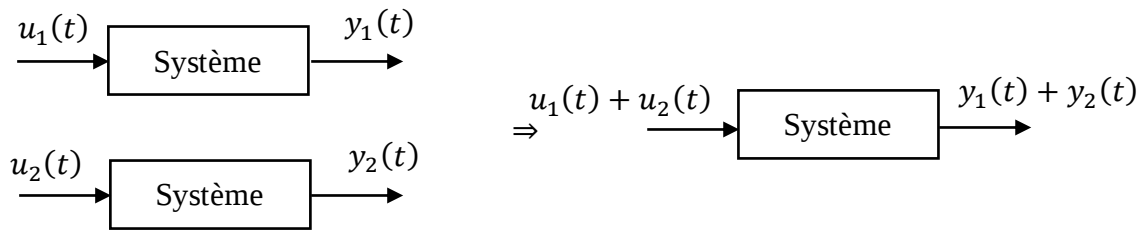


Fig.3 Principe de superposition.

On oppose les systèmes linéaires aux systèmes non linéaires. Il est à noter qu'aucun système physique n'est strictement linéaire, mais, certains systèmes non linéaires peuvent être considérés comme linéaires dans une certaine zone de fonctionnement.

2.5 Système causal

La causalité signifie « l'effet ne peut pas précéder la cause ». Le signal d'entrée d'un système représente la cause, et la réponse du système représente l'effet. Ainsi, « un système est dit causal si sa réponse temporelle dépend seulement des valeurs présentes et passées de sa grandeur d'entrée, c.-à-d., la réponse $y(t)$ à l'instant t dépend seulement des valeurs de l'entrée $u(\tau)$ où $\tau \leq t$. Ces systèmes sont aussi dits *systèmes physiquement réalisables*.

2.6 Système invariant

Un système est dit *invariant* (stationnaire) si la relation entre son entrée et sa sortie est indépendante du temps t (c.-à-d., les paramètres du système sont constants).

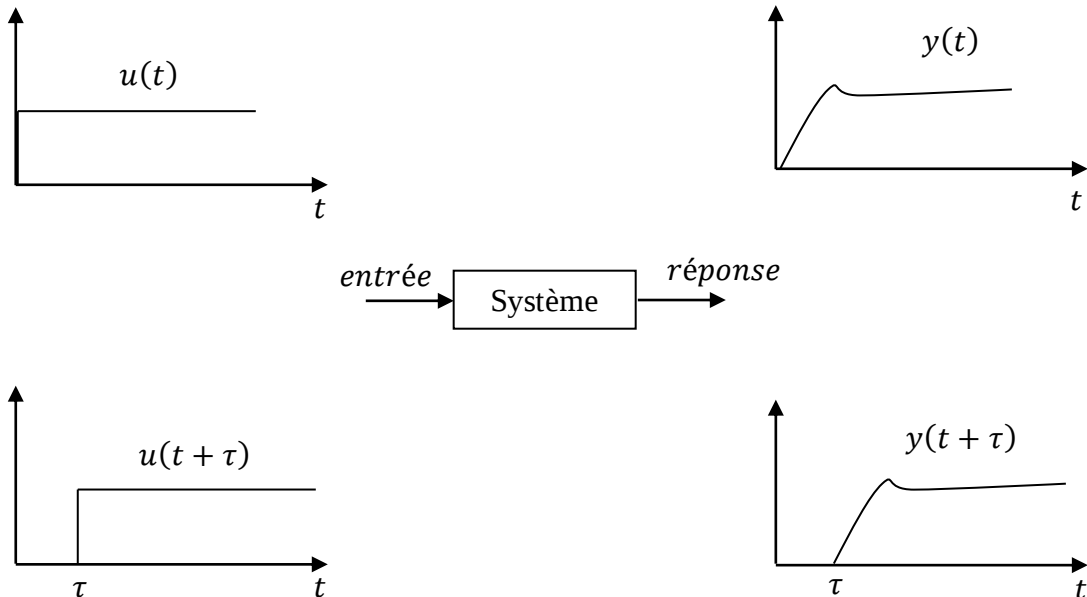


Fig.4 Comportement d'un système invariant.

2.7 Système continu / Système échantillonné

Un système est dit continu si les variations des grandeurs le caractérisant sont des fonctions de type $f(t)$ où t est une variable continue (le temps en général). Les systèmes continus s'opposent aux systèmes discrets (échantillonnés).

2.8 Système déterministe / Système aléatoire

Un système est dit *déterministe* si pour chaque entrée, il n'existe qu'une seule sortie possible. Dans le cas contraire on dit que le système est *aléatoire*, c.-à-d. pour chaque entrée, il existe plusieurs sorties possibles, chacune d'elles est affectée à une probabilité.

2.9 Système monovariante /Système multivariable

Un système est dit *monovariante* ou SISO (Single Input Sigle Output) s'il possède une seule entrée et une seule sortie. Un système est dit *multivariable* ou MIMO (Multiple Input Multiple Output) s'il possède plusieurs entrées et /ou plusieurs sorties.

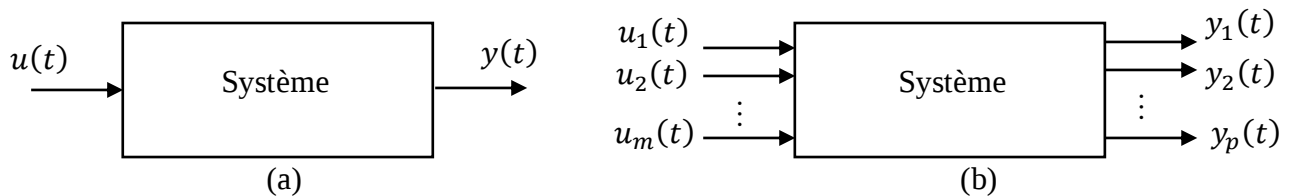


Fig.5 Système monovariante (a), système multivariable (b).

Remarque 1.1: Dans le cadre de ce cours on ne s'intéresse qu'aux systèmes linéaires, continus, invariants, causaux et déterministes.

3. Rappel sur le calcul matriciel

3.1 Matrice

Une matrice de dimensions $n \times m$ (notée $A_{n \times m}$) est un tableau de nombres à n lignes et m colonnes. Les nombres qui composent la matrice (a_{ij} , où $i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$) sont appelés éléments ou coefficients de la matrice.

$$A_{n \times m} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Matrice ligne

Une matrice ligne $A_{1 \times m}$ est une matrice ayant une seule ligne et m colonnes.

$$A_{1 \times m} = [a_{11} \quad \dots \quad a_{1m}] \quad (1.2)$$

Matrice colonne

Une matrice colonne $A_{n \times 1}$ est une matrice ayant une seule colonne et n lignes.

$$A_{n \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Matrice carrée

Une matrice carrée est une matrice qui possède le même nombre de lignes et de colonnes (c.-à-d. $n = m$).

Diagonale d'une matrice

La diagonale principale (ou simplement la diagonale) d'une matrice est l'ensemble des éléments a_{ii} de la matrice A .

Matrice diagonale

Une matrice diagonale est une matrice carrée dont les éléments en dehors de la diagonale principale sont nuls. Les éléments de la diagonale peuvent être ou ne pas être nuls.

Matrice unité (matrice identité)

La matrice unité ou matrice identité est une matrice diagonale ne possédant que des 1 sur la diagonale ($a_{ii} = 1$).

3.2 Opérations élémentaires sur les matrices**3.2.1 Addition de deux matrices**

On ne peut additionner ou soustraire que deux matrices de même dimension. Soient deux matrices A et B de même dimension.

Addition: $C = A + B$ où $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Soustraction : $D = A - B$ où $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

3.2.2 Transposée d'une matrice

On appelle transposée d'une matrice A de dimension $n \times m$ la matrice notée A^T de dimension $m \times n$ obtenue en permettant les lignes et les colonnes

$$A_{n \times m} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

La transposée de A est :

$$A_{m \times n} = [a_{ji}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

3.2.3 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Le produit d'une matrice par un scalaire est la matrice obtenue en multipliant chaque élément de la matrice par ce scalaire.

3.2.4 Multiplication de deux matrices

La multiplication de deux matrices A et B n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . La matrice obtenue C est une matrice possédant le même nombre de lignes de la matrice A et le même nombre de colonnes de la matrice B .

$$C_{n \times p} = A_{n \times m} \times B_{m \times p} \quad (1.6)$$

Exemple 1.3 : soient deux matrices A et B .

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}, \quad C_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

avec :

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}, \quad c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32},$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}, \quad c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}.$$

3.3 Trace d'une matrice

La trace d'une matrice est la somme des éléments de la diagonale principale de la matrice ($\sum a_{ii}$).

3.4 Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Soit A une matrice carrée d'ordre 2.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Le déterminant de A noté $\det(A)$ se calcule de la manière suivante :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (1.8)$$

3.5 Mineurs

Le mineur M_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne de A .

Exemple 1.4 : soit la matrice carrée d'ordre 3.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{22} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

3.6 Cofacteur

Le cofacteur noté D_{ij} d'une matrice A est défini par la relation :

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (1.9)$$

Remarque 1.2 : Nous constatons que le mineur et le cofacteur ont la même valeur numérique, mais le signe peut être différent.

3.7 Déterminant d'une matrice d'ordre n

Soit A une matrice carrée et D_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant la méthode suivante :

- 1- Choisir une ligne ou une colonne de A : pour simplifier les calculs, on choisit la ligne ou la colonne contenant le plus grand nombre de zéros.
- 2- Multiplier chaque élément a_{ij} de la ligne ou la colonne choisie par le cofacteur D_{ij} correspondant
- 3- Faire la somme de ces résultats.

Exemple 1.4 : Calculer le déterminant de la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

En choisissant la première ligne :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}D_{11} + a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} \\
&= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

En choisissant la troisième colonne :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{13}D_{13} + a_{23}D_{23} + a_{33}D_{33} \\
&= a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Autre méthode pour calculer le déterminant

- 1- On affecte à chacun des éléments de la matrice un signe +/-.
- 2- On associe un signe positif à la position de a_{11} , puis on alterne les signes en se déplaçant horizontalement ou verticalement.
- 3- On choisit une ligne ou une colonne de A : pour simplifier les calculs, on choisit la ligne ou la colonne contenant le plus grand nombre de zéros.
- 4- On multiplie chaque élément a_{ij} de la ligne ou la colonne choisie par son mineur correspondant.
- 5- Faire la somme ou la différence de ces résultats selon le signe affecté aux éléments lors de la deuxième étape.

Exemple 1.5 : Calculer $\det(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^- & a_{13}^+ \\ a_{21}^- & a_{22}^+ & a_{23}^- \\ a_{31}^+ & a_{32}^- & a_{33}^+ \end{bmatrix}$$

En choisissant la première ligne :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

En choisissant la deuxième colonne :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{13}M_{13} + a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33} \\
&= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

3.8 Matrice adjointe (comatrice)

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

On appelle matrice adjointe de A , la matrice carrée d'ordre n notée $adj(A)$ définie par :

$$adj(A) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

$D_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ est le cofacteur de l'élément a_{ij} .

3.9 Inverse d'une matrice

Une matrice carrée A de dimension $n \times n$ (c.-à-d. d'ordre n) est dite inversible (ou régulière ou non singulière) s'il existe une matrice B d'ordre n appelée matrice inverse de A .

$$B = A^{-1} \quad (1.12)$$

tel que $AXB = BXA = I_n$ où I_n est la matrice identité d'ordre n .

La formule générale de l'inverse d'une matrice est :

$$A^{-1} = \frac{[adj(A)]^T}{det(A)} \quad (1.13)$$

où :

$det(A) \neq 0$ est le déterminant de A .

$adj(A)$ est la matrice adjointe de A

3.10 Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Si A est une matrice carrée ($n \times n$) quelconque, les n valeurs propres *distincts* de A sont notés λ_i et sont associées aux n vecteurs propres V_i par :

$$AV_i = \lambda_i V_i \quad i = 1 \dots n \quad (1.14)$$

Les valeurs propres de A sont les scalaires tels que:

$$det(A - \lambda I) = 0 \quad (1.15)$$

où I est la matrice identité d'ordre n .

Cette dernière équation fonction de λ et de degré n est dite équation caractéristique de A .

Exemple 1.6 : calculer les valeurs et les vecteurs propres de la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1.$$

Vecteurs propres

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0 \text{ et on pose } x_2 = 1 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2, v_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow y_2 = -y_1, y_1 = -y_2, y_2 = -y_3 \text{ et on pose } y_1 = 1 \Rightarrow y_2 = -1, y_3 = 1$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Av_3 = \lambda_3 v_3, v_3 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \Rightarrow y_2 = y_1, y_1 = y_2, y_2 = y_3 \text{ et on pose } y_1 = 1 \Rightarrow y_2 = 1, y_3 = 1$$

$$\Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.11 Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice A d'ordre n est défini comme étant le nombre de lignes ou de colonnes de A qui sont linéairement indépendants.

- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n$ dans ce cas A est dite de *rang plein*.
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) < n$.

4. Exercices

Exercice 01

Soient deux matrices A et B .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

- 1- Calculer la trace de A et B .
- 2- Calculer $A + B$, $A - B$ et $A \times B$.
- 3- Calculer la transposée de A et B .
- 4- Calculer le rang de A et B .

Exercice 02

Soient deux matrices A et B .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- 1- Calculer les cofacteurs de la matrice A et B .

- 2- Calculer A^{-1} et B^{-1} .
- 3- Calculer AA^{-1} et BB^{-1} .
- 4- Calculer le rang de A et B .

Exercice 03

Soit les deux matrices A et B .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 1- Calculer les valeurs propres de A et B .
- 2- Calculer les vecteurs propres associés aux valeurs propres de chacune des deux matrices A et B .