

Chapitre 2 Représentation des systèmes multivariables

1. Introduction

Les méthodes d'analyse et de commande des systèmes dynamiques linéaires étudiées jusqu'au présent reposent sur une représentation externe du système par équations différentielles ou fonction de transfert. En effet, les difficultés liées à l'emploi des équations différentielles (représentation temporelle), notamment lors de l'étude de systèmes d'ordre élevé (supérieur à deux), ont été à l'origine du développement de la transformée de Laplace conduisant à une représentation par fonction de transfert. L'utilité de la représentation par fonction de transfert a été montrée lors de l'étude de la réponse fréquentielle (lieu Bode, diagramme de Nyquist...etc) et la stabilité du système. Cependant, cette représentation présente deux inconvénients majeurs :

- C'est une représentation obtenue en supposant les conditions initiales nulles (système initialement au repos). Ceci n'est pas toujours vrai et ces conditions initiales jouent souvent un rôle très important dans l'étude des systèmes dans le domaine temporel où la réponse dépend du passé du système.
- C'est une représentation qui s'adapte mal pour décrire les systèmes MIMO.

Pour de telles raisons, les théories de commande avancée utilisent un type de modélisation moderne dite *représentation d'état* (ou *représentation interne*). Ce type de modèle fut popularisé dans les années 60 même si son origine est plus lointaine, il s'agit d'un modèle qui prend en compte la dynamique interne (état) du système et ne se limite pas à la description d'un comportement de type boîte noire (entrée/ sortie).

2. Différentes représentations des systèmes

Le schéma ci-dessous montre les différents types de représentations des systèmes dynamiques linéaires en considérant les deux cas monovariante et multivariable.

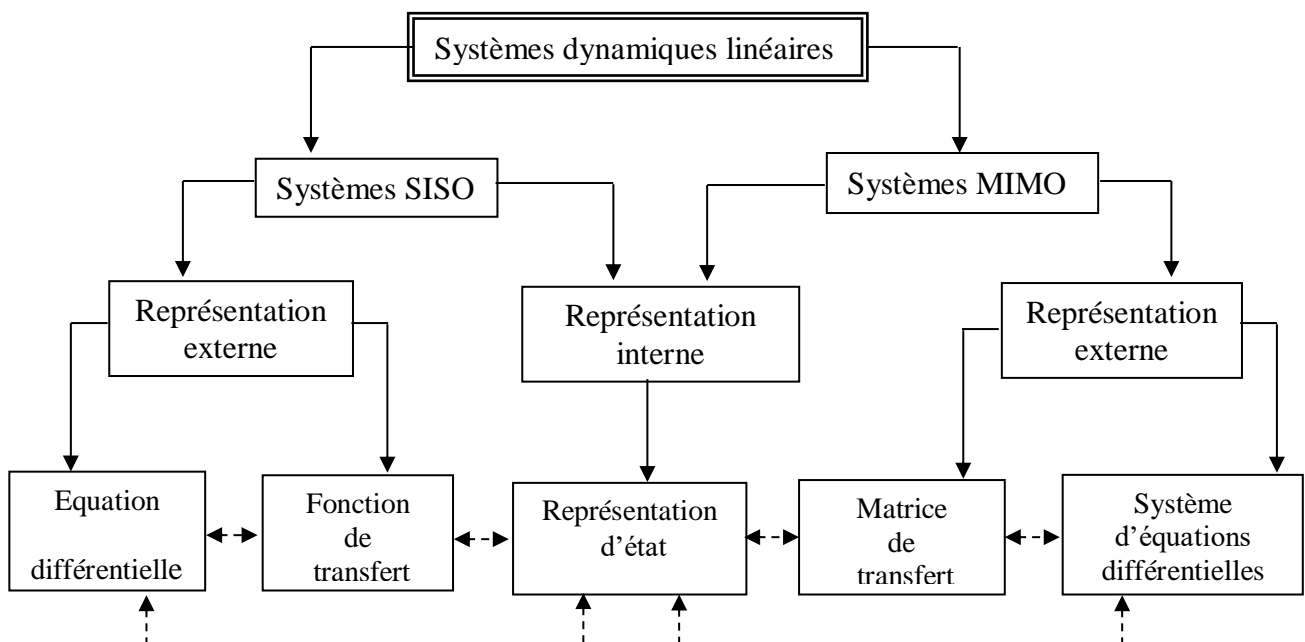


Fig.2.1 Différents types de représentations des systèmes.

Remarque 2.1 : Dans le cadre de ce cours, on ne considère que les systèmes dynamiques linéaires invariants et continus.

3. Représentation des systèmes monovariables (SISO)

3.1 Représentation externes

Cette représentation utilise directement la relation entrée/sortie considérant le système comme une boîte noire.

3.1.1 Equation différentielle

Soit un système linéaire invariant monovariante d'ordre n .

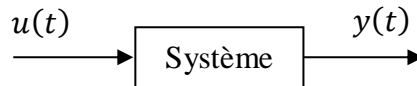


Fig.2.2 Schéma bloc d'un système monovariante

Un tel système est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme :

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u(t) \quad (2.1)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système, et $n \geq m$ (système causal).

3.1.2 Fonction de transfert

La fonction de transfert ou transmittance d'un système donné est le rapport entre la transformée de Laplace de sa sortie et celle de son entrée. En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (2.1) et en prenant les conditions initiales nulles, on obtient :

$$Y(s)[s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0] = U(s)[b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0] \quad (2.2)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2.3)$$

3.2 Représentation internes (ou d'état)

Le principe général de la représentation d'état consiste à décrire un système en considérant sa *dynamique interne* et pas seulement une relation entre son entrée et sa sortie (comme le fait la fonction de transfert). Ainsi, il convient de redonner de l'importance à des grandeurs qui ne sont ni entrée, ni sortie, tout en prenant en compte l'ensemble des phénomènes dynamiques et statiques qui confère au système son comportement. Une telle préoccupation conduit aux définitions suivantes

3.2.1 Définitions

État : l'état à l'instant t_0 d'un système d'ordre n représente l'ensemble de n informations que l'on doit posséder sur le système à cet instant pour pouvoir déterminer son évolution ultérieure ($t > t_0$), à partir de la seule connaissance de l'entrée ultérieure (pour $t > t_0$).

Variables d'état : l'ensemble de ces informations constitue les variables d'état du système à l'instant t_0 : $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$.

Vecteur d'état : les variables d'état sont toujours rassemblées dans un vecteur x nommé vecteur d'état, ainsi à $t = t_0$, on aura $x(t_0) = [x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]^T$, on peut dire que les variables

d'état représentent l'évolution des conditions initiales, ou encore qu'elles résument tous le passé du système, les variables d'état sont la mémoire du passé.

Espace d'état : Il s'agit tout simplement de l'espace vectoriel dans lequel le vecteur d'état x est susceptible d'évoluer, à chaque instant le vecteur x étant associé à un point de cet espace. Cet espace est donc R^n .

Dans la plupart des cas, l'évolution en fonction du temps du système peut être décrite par les deux équations (équation d'état et équation de sortie) suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u, t) \\ y(t) &= g(x, u, t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dans le cas où le système considéré est linéaire, la représentation d'état se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Si le système est supposé, en outre invariant (stationnaire), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

où :

- $x(t) \in R^n$: Vecteur d'état
- $y(t) \in R$: Vecteur de sortie (vecteur de mesure)
- $u(t) \in R$: Vecteur d'entrée (vecteur de commande)
- $A \in R^{n \times n}$: Matrice d'évolution ou dynamique
- $B \in R^{n \times 1}$: Vecteur de commande (vecteur d'entrée)
- $C \in R^{1 \times n}$: Vecteur d'observation (vecteur de sortie)
- $D \in R$: Constante de transmission directe (souvent nul).

Exemple 2.1 : Considérons un moteur à courant continu (MCC) commandé par la tension $u(t)$ aux bornes de l'inducteur (stator) et supposons qu'il fonctionne en régime linéaire (courant de l'induit constant). Trouver une représentation d'état pour le MCC. La sortie étant la vitesse de rotation $y(t)$.

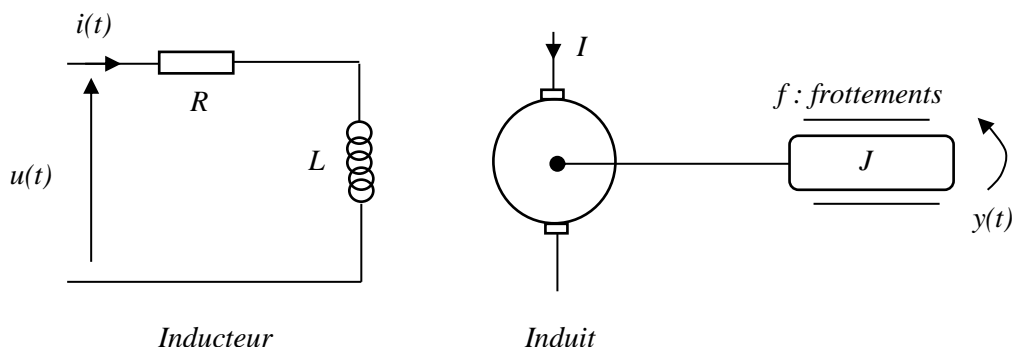


Fig.2.3 Schéma de principe d'un MCC.

Le moteur admet trois équations :

Equation électrique :

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.7)$$

Equation mécanique :

$$T(t) = fy(t) + J \frac{dy(t)}{dt} \quad (2.8)$$

Equation de couplage :

$$T(t) = Ki(t) \quad (2.9)$$

où $i(t)$ est le courant inducteur, $T(t)$ est le couple, f est le coefficient de frottement visqueux et K est la constante de couple.

Remarques 2.2: Un système donné possède une fonction de transfert unique, par contre, il possède une infinité de représentations d'état (une nouvelle représentation d'état s'obtient, par exemple, en permutant les définitions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$).

Exemple 2.2 : Dans l'exemple du MCC, on peut choisir comme variables d'état le courant et la vitesse de rotation :

Remarque 2.3 : Toutes les représentations d'état d'un même système possèdent le même *nombre minimal* de variable d'état, ce *nombre minimal* est égal à l'ordre n du système.

Remarque 2.4 : Les variables d'état peuvent avoir un sens physique ou non.

4. Représentation des systèmes multivariables (MIMO)

En général, la représentation des systèmes multivariable se fait par extension des techniques du cas monovariable.

4.1 Représentation externes

4.1.1 Système d'équations différentielles

Un système linéaire invariant multivariable d'ordre n possédant m entrées et p sorties peut être décrit par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Après application des lois de la physique, de nombreux systèmes multivariables peuvent être décrits par des équations différentielles et algébriques de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ y_1(t) = h_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \vdots \\ \dot{y}_p(t) = h_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \end{cases} \quad (2.17)$$

où $u_i(t), i = 1 \dots m$ et $y_j(t), j = 1 \dots p$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système. Dans le cadre de notre cours les fonctions f_i et h_i sont linéaires.

4.1.2 Matrice de transfert

Dans le cas SISO, la fonction reliant l'entrée et la sortie du système est appelée fonction de transfert, dans le cas MIMO, on a plusieurs fonctions de transfert représentant l'effet de chaque entrée sur chaque sortie. L'ensemble de ces fonctions rangées en tableau constitue la matrice de transfert du système.

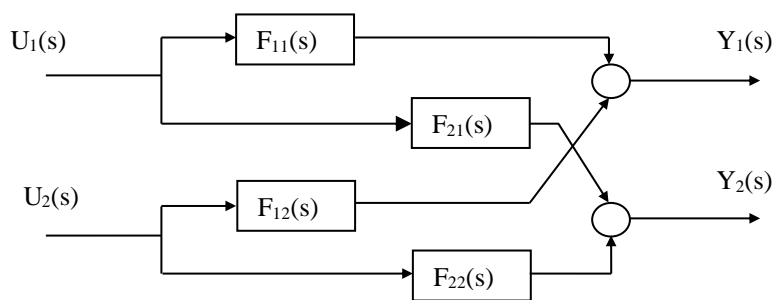


Fig.2.4 Schéma bloc d'un système multivariable à deux entrées et deux sorties

Cas des systèmes SISO:

$$F(S) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.18)$$

Cas des systèmes MIMO:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

4.2 Représentation internes (ou d'état)

La représentation d'état étant particulièrement adaptés aux systèmes multivariables, elle est obtenue à partir des autres représentations (particulièrement à partir de la matrice de transfert). Un système linéaire multivariable et invariant possédant m entrées et p sorties, peut être représenté par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

où :

- $x(t) \in R^n$: Vecteur d'état
- $u(t) \in R^m$: Matrice d'entrée (ou de commande),
- $y(t) \in R^p$: Matrice de sortie (ou de mesure),
- $A \in R^{n \times n}$: Matrice dynamique (ou d'évolution),
- $B \in R^{n \times m}$: Matrice de commande (ou d'entrée),
- $C \in R^{p \times n}$: Matrice d'observation (ou de sortie),
- $D \in R^{p \times m}$: Matrice de transmission directe.

Remarque 2.6 : Différentes méthodes de passage de la représentation par matrice de transfert à la représentation d'état seront présentées dans le quatrième chapitre.

5. Représentation analogique des modèles d'état

Soit la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Le schéma analogique de cette représentation est le suivant :

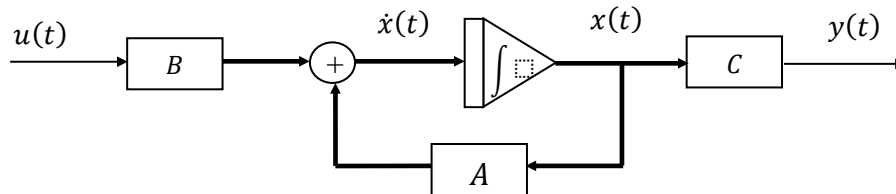


Fig.2.5 Schéma analogique d'un modèle d'état.

Exemple 2.3 : Pour la représentation d'état du moteur :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Le schéma analogique correspondant est le suivant :

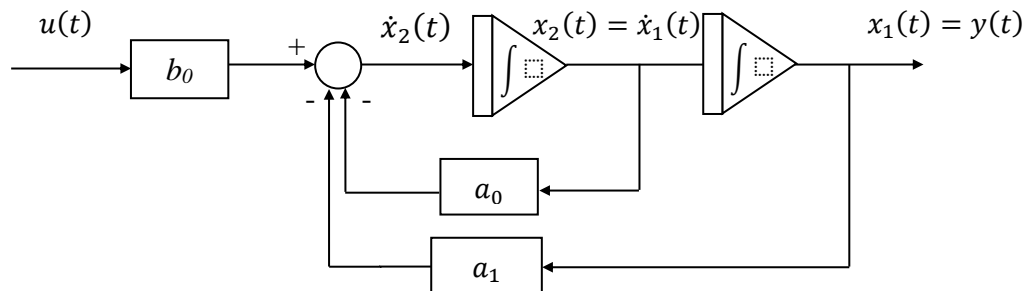


Fig.2.6 Schéma analogique du MCC.

6. Avantages de la représentation d'état

- C'est une représentation qui s'adapte bien aux systèmes multivariables, contrairement, à la représentation classique par fonction de transfert qui ne s'applique que dans le cas monovariable.
- C'est une représentation interne permettant d'accéder aux grandeurs internes (variables d'état) du système, on est capable de suivre, à tout instant, l'évolution de chacune des variables internes, alors que la représentation par fonction de transfert n'aurait fourni que la sortie.
- Dans la représentation d'état les conditions initiales apparaissent explicitement, comme dans toute équation différentielle, au contraire, la représentation externe par fonction de transfert impose que les conditions initiales soient nulles (ceci n'est pas toujours vérifié en réalité).

7. Résolution de l'équation d'état

Considérons un système d'ordre n représenté par le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Il s'agit de trouver l'expression de la sortie $y(t)$ à une entrée $u(t)$.

7.1 Cas d'une équation scalaire

Dans un premier temps, pour fixer les idées, on se place dans le cas scalaire c.-à-d., le système est d'ordre $n = 1$ et a une seule variable d'état $x(t)$. Dans ce cas, les équation (2.20) peut s'écrire comme suit :

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad \text{avec: } x(t_0 = 0) = x_0 \quad (2.21)$$

$$y(t) = cx(t) + du(t) \quad (2.22)$$

où a, b, c et d sont des constantes.

- **Réponse libre:** Il s'agit ici de voir comment le système réagit librement à la seule condition initiale et en absence de l'entrée. C'est la réponse du système autonome.

$$\dot{x}(t) = ax(t) \Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = a \Rightarrow \frac{d[\ln(x(t))]}{dt} = a$$

Intégrons le dernier terme entre $t_0 = 0$ et t , on aura :

$$[\ln(x(t))]_{t_0}^t = a[t]_{t_0}^t$$

$$\ln(x(t)) - \ln(x(t_0)) = a t \Rightarrow \ln\left(\frac{x(t)}{x(t_0)}\right) = a t \Rightarrow \frac{x(t)}{x(t_0)} = e^{a t}$$

Finalement, la réponse libre de l'équation (2.21) est:

$$x(t) = x_0 e^{a t} \quad (2.23)$$

- **Réponse complète (totale):** Il s'agit ici de voir comment le système réagit en présence de l'entrée. On utilise la méthode de variation des constantes :

$$x(t) = k(t)e^{a t} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= a \underbrace{k(t)e^{at}}_{x(t)} + \dot{k}(t)e^{at} = ax(t) + \dot{k}(t)e^{at} \\ \dot{x}(t) &= ax(t) + \dot{k}(t)e^{at} = ax(t) + bu(t) \\ \Rightarrow \dot{k}(t) &= e^{-at}bu(t)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow k(t) = k(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$$

En remplaçant l'expression $k(t)$ dans (2.24), on obtient :

$$x(t) = k(t)e^{at} = \left[k(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau \right] e^{at}$$

A partir de (2.24), on a : $k(t_0) = x(t_0) = x_0$

$$x(t) = k(t)e^{at} = \left[x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau \right] e^{at}$$

Alors, on a :

$$x(t) = x_0e^{at} + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \quad (2.25)$$

Finalement, en remplaçant (2.25) dans l'équation de sortie de (2.20), on obtient la réponse totale du système :

$$y(t) = \underbrace{cx_0e^{at}}_{\text{Réponse libre}} + \underbrace{c \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)}_{\text{Réponse forcée}} \quad (2.26)$$

Remarque 2.7 : Dans la réponse (2.26), l'on peut faire une distinction utile dans le membre de droite et faire apparaître deux réponses:

Le réponse libre : elle correspond au premier terme et ne dépend que du modèle du système (présence du pôle a) et de la condition initiale (présence de x_0). Elle ne dépend pas de l'action extérieure (commande).

Le réponse forcée : elle est associée aux deux derniers termes et correspond en fait à la réaction du système à l'excitation $u(t)$. Elle dépend du modèle du système (présence de a) mais aussi de la nature du signal $u(t)$.

En outre, pour un système stable, lorsque la réponse $y(t)$ tend vers une valeur constante pour une entrée constante par exemple (échelon), l'on peut distinguer deux régimes:

Le régime transitoire qui est le temps durant lequel $y(t)$ subit une évolution avant de se rapprocher d'une valeur constante. La durée du régime transitoire correspond à un temps appelé *temps de réponse* t_r . La réponse de régime transitoire disparaît lorsque $t \rightarrow \infty$

Le régime permanent qui succède au régime transitoire, qui commence donc à t_r et qui correspond à l'intervalle de temps durant lequel $y(t)$ est considéré comme restant toujours proche de sa valeur finale. La réponse de régime permanent persiste lorsque $t \rightarrow \infty$

7.2 Cas d'une équation matricielle

Dans le cas où le système est d'ordre $n > 1$, donc possède n variables d'état $x_i(t)$.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

avec : $x(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$ est le vecteur d'état, $x(t_0) = x_0 = [x_1^0 \dots x_n^0]^T$ est la condition initiale et A, B, C et D sont des matrices de dimensions appropriées.

La solution d'un tel système matriciel est analogue à celle obtenue dans le cas scalaire, donc, en remplaçant les scalaires a, b, c et d dans (2.25) et (2.26) par les matrices A, B, C et D respectivement, il vient :

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (2.27)$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x_0}_{\text{Réponse libre}} + \underbrace{C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{Réponse forcée}} \quad (2.28)$$

Cependant cela nous amène à considérer une fonction matricielle de type nouveau, e^{At} où A est une *matrice*.

Posons :

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (2.29)$$

Remplaçons (2.29) dans (2.27), il vient :

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (2.30)$$

$\Phi(t)$ est une matrice dite *matrice de transition d'état*.

Le problème de la résolution des équations d'état se ramène au problème de calcul de la matrice de transition. Avant de décrire différentes méthodes pour l'obtention de la matrice de transition, nous montrons quelques propriétés de cette matrice.

7.2.1 Propriétés de la matrice de transition d'état

Propriété 1 : $\Phi(0) = e^{A \times 0} = I$ (où I matrice identité).

Propriété 2 : $\Phi(t) = e^{At} = [e^{-At}]^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1}$, $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$.

Propriété 3 : $\Phi(t_1 + t_2) = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2} = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$.

Propriété 4 : $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$.

Propriété 5 : $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1)$.

7.2.2 Calcul de la matrice de transition d'état

Il s'agit de calculer e^{At} , et bon nombre de possibilités sont offertes :

a) Méthode de transformée de Laplace

Soit l'équation d'état $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, avec : $x(t_0 = 0) = x_0$.
En posant $u(t) = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ TL[\dot{x}(t)] &= TL[Ax(t)] \\ sX(s) - X_0 &= AX(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}x_0 \Rightarrow TL^{-1}[X(s)] = x(t) = TL^{-1}[(sI - A)^{-1}]x_0 \end{aligned}$$

Finalement :

$$x(t) = TL^{-1}[(sI - A)^{-1}]x_0 \quad (2.31)$$

D'autre part, d'après la section précédente, la réponse libre de équation d'état à $t_0 = 0$:

$$x(t) = e^{At}x_0 \quad (2.32)$$

Par identification de (2.31) et (2.32), on aura :

$$e^{At} = TL^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

Exemple 2.4

Soit un système d'ordre deux :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Calculer la matrice de transition e^A .

b) Méthode de diagonalisation de la matrice A

Si la matrice d'état A est diagonale, on montre facilement que :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

d'où l'idée de passer par un changement de variables judicieux, de la représentation d'état initiale vers une autre représentation faisant intervenir une matrice d'état diagonale.

Si A est une matrice carrée ($n \times n$) quelconque, les n valeurs propres *distincts* de A sont notés λ_i , elles sont associées aux n vecteurs propres V_i par :

$$AV_i = \lambda_i V_i \quad i = 1 \dots n \quad (2.33)$$

d'où

$$\begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ AV_2 = \lambda_2 V_2 \\ \vdots \\ AV_n = \lambda_n V_n \end{cases} \quad (2.34)$$

Sous forme matricielle :

$$A[V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n] = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

En multipliant à gauche les deux membres de (2.35) par $[V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n]^{-1}$:

$$\underbrace{[V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n]^{-1}}_{T^{-1}} A \underbrace{[V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n]}_T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$T^{-1}AT = \Delta \Rightarrow A = T \underbrace{\Delta}_{\Delta} T^{-1} \quad (2.37)$$

Finalement :

$$e^{At} = T e^{\Delta t} T^{-1} \quad (2.38)$$

Exemple 2.5 : Calculer la matrice de transition e^A du système donné dans l'exemple 2.4.

c) Méthode de SYLVESTER

Si la matrice A possède n valeurs propres distinctes λ_i , on montre que :

$$e^{At} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(A - \lambda_j I)}{(\lambda_i - \lambda_j)} \right] \quad (2.39)$$

Remarque 2.8: pour les valeurs propres multiples, une autre formule de Sylvester, plus compliquées est utilisée.

Exemple 2.6 : Calculer la matrice de transition e^A du système donné dans l'exemple 2.4.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

d) Méthode de CAYLEY-HAMILTON

Cette méthode est basée sur le fait qu'une matrice est toujours solution de son équation caractéristique :

L'équation caractéristique de la matrice A de dimensions $(n \times n)$ est :

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

On a toujours :

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0 \Rightarrow A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0I = 0$$

Donc, pour toutes matrice carrée possédant n valeurs propres distinctes, toutes puissance de A supérieure ou égale à n peut s'exprimer en fonction d'une combinaison des puissances de A inférieures à n . Donc :

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!}$$

$$e^{At} = \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} + \alpha_{n-2}(t)A^{n-2} + \dots + \alpha_1(t)A + \alpha_0(t)I \quad (2.40)$$

Notons que tous les valeurs propres λ_i de la matrice A vérifient également cette équation, c-à-d :

$$e^{\lambda_i t} = \alpha_{n-1}(t) \lambda_i^{n-1} + \alpha_{n-2}(t) \lambda_i^{n-2} + \dots + \alpha_1(t) \lambda_i + \alpha_0(t)I \quad (2.41)$$

En résumé cette méthode consiste à calculer e^{At} de la façon suivante :

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i \quad (2.42)$$

où les fonctions $\alpha_i(t)$ sont à calculer en résolvant le système d'équations suivant :

$$e^{\lambda_i t} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) \lambda_i^j \quad (2.43)$$

Exemple 2.7 : Calculer la matrice de transition e^A du système donné dans l'exemple 2.4.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

7.2.3 Réponse impulsionnelle

On donne la réponse générale d'un système donné sous forme de représentation d'état (par souci de simplicité, on pose $D = 0$):

$$y(t) = C \left[e^{At} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right]$$

Pour calculer la réponse à une entrée de type impulsion de Dirac $u(t) = \delta(t)$, on utilise la propriété suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \text{ où } f \text{ est une fonction continue à l'origine}$$

Alors :

$$y(t) = C \left[e^{At} x_0 + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} B \delta(\tau) d\tau \right] = C [e^{At} x_0 + e^{At} B]$$

$$y(t) = C e^{At} [x_0 + B] \quad (2.44)$$

7.2.4 Réponse indicielle

L'entrée est l'échelon unitaire également appelée fonction de Heavyside $u(t) = \Gamma(t)$ définie par :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$y(t) = C \left[e^{At} x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B d\tau \right]$$

$$y(t) = C \left[e^{At} x_0 + [-e^{A(t-\tau)} A^{-1} B]_0^t \right]$$

$$y(t) = C [e^{At} x_0 - A^{-1} B + e^{At} A^{-1} B]$$

$$y(t) = C e^{At} [x_0 + A^{-1} B] - C A^{-1} B \quad (2.45)$$

8. Stabilité

La notion de stabilité est très importante en automatique. À quelques rares exceptions près, les systèmes ne vérifiant pas cette qualité sont inutilisables voire dangereux. Par une formulation simple, on définit la stabilité par l'une des propositions suivantes: un système linéaire est stable :

- Lorsque sa réponse à un échelon prend une valeur finie en régime permanent, ou
- Lorsque sa réponse à une impulsion tend vers 0, ou
- Lorsque sa réponse à une sinusoïde est une sinusoïde de même fréquence et d'amplitude finie.

Dans le domaine de la stabilité des systèmes on considère :

- la notion de stabilité externe**, définie par rapport à la variable de sortie $y(t)$. Cette stabilité est dénommée aussi stabilité au sens entrée bornée-sortie bornée ou stabilité BIBO (Bounded Input Bounded Output stability).
- la notion de stabilité interne**, qui est définie par rapport à la variable d'état $x(t)$. Cette stabilité est aussi dénommée stabilité asymptotique.

8.1 Stabilité externe (Stabilité BIBO)

D'une façon générale, un système est BIBO-stable si à tout signal *d'entrée borné* correspond un *signal borné en sortie*.

Pour traduire en sens mathématique la définition de la stabilité BIBO, on considère un système dont la fonction de transfert contient tous les genres de pôles : α pôles à l'origine ($p_1 = 0$), deux pôles réels distincts (p_2 et p_3), un seul pôle double (p_4) et deux pôles complexes conjugués ($p_5 = \sigma + j\omega$ $p_6 = \sigma - j\omega$) et un nombre m de zéros z_i avec ($m \leq n$).

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{s^\alpha (s - p_2)(s - p_3)(s - p_4)^2 (s - \sigma - j\omega)(s - \sigma + j\omega)}$$

La réponse indicielle $U(s) = \frac{1}{s}$ (entrée bornée) :

$$Y(s) = \frac{N(s)}{s^{\alpha+1} (s - p_2)(s - p_3)(s - p_4)^2 (s - \sigma - j\omega)(s - \sigma + j\omega)}$$

La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(s) = \frac{N(s)}{s^{\alpha+1}(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4)^2(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{A_{\alpha+1}}{s^{\alpha+1}} + \frac{A_\alpha}{s^\alpha} + \dots + \frac{A_1}{s}}_{\text{réponse du pôle à l'origine}} + \underbrace{\frac{B_1}{(s-p_2)} + \frac{B_2}{(s-p_3)}}_{\text{Réponse des 2 pôles réels}} + \underbrace{\frac{C_1}{(s-p_4)} + \frac{C_2}{(s-p_4)^2}}_{\text{réponse du pôle double}} + \underbrace{\frac{D_1}{(s-\sigma-j\omega)} + \frac{D_2}{(s-\sigma+j\omega)}}_{\text{Réponse des 2 pôles complexes distincts}}$$

ou A_i, B_i et C_i sont des nombres réels, et D_i des nombres complexes conjugués.

La réponse indicielle est obtenue en calculant la transformée inverse de Laplace de $Y(S)$ (voir la table de la TL)

$$y(t) = \underbrace{\frac{A_{\alpha+1}}{\alpha!} t^\alpha + \frac{A_\alpha}{(\alpha-1)!} t^{\alpha-1} + \dots + A_1}_{(I)\text{Réponse du pôle à l'origine}} + \underbrace{B_1 e^{p_2 t} + B_2 e^{p_3 t}}_{(II)\text{Réponse des 2 pôles réels}} + \underbrace{C_1 e^{p_4 t} + C_2 t e^{p_4 t}}_{(III)\text{Réponse du pôle double}} + \underbrace{|D_1| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)}_{(IV)\text{Réponse des 2 pôles complexes}}$$

Pour que le système soit stable, il faut que sa réponse soit bornée, il faut que :

- Le polynôme (I) soit de degré zéro (terme constant), donc que $\alpha = 0$ (pas de pôles à l'origine).
- Tous les exponentielles soient amorties (tendent vers zéro quand t tend vers l'infini) donc, que tous les pôles p_i de la fonction de transfert soient à partie réelle strictement négative.

Théorème 2.1 : Un système linéaire et invariant est *stable (BIBO stable)* si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à *partie réelle strictement négative*.

8.2 Stabilité interne (Stabilité asymptotique).

Pour envisager rigoureusement d'étudier la stabilité d'un système, il faut donc d'abord définir la notion d'état d'équilibre et celle de stabilité d'un état d'équilibre.

8.2.1 Etat d'équilibre

Un système se trouve dans un état d'équilibre si cet état n'est pas modifié lorsque le système est abandonné à lui-même. Un tel état d'équilibre se détermine en posant à la fois $u(t) = 0$ (système livré à lui-même) et $\dot{x}(t) = 0$ (pas modifié).

Soit un système donné :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

La recherche des états d'équilibre possibles d'un tel système revient donc à résoudre $Ax(t) = 0$. De cette dernière équation, l'on comprend qu'il peut exister un seul ou plusieurs états d'équilibre selon le rang de la matrice A :

Cas 1 : $\text{rang}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ n'a pas de valeurs propres nulles : alors il existe un seul état d'équilibre qui est l'origine $x(t) = x_0 = 0$

Cas 2 : $\text{rang}(A) < n \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ possède au moins une valeur propre nulle : alors il existe une infinité d'états d'équilibre.

- Un état d'équilibre est dit *asymptotiquement stable* si, lorsque le système est écarté de cet état sous l'effet d'une perturbation, il y revient (en un temps infini).
- L'état d'équilibre est dit *instable*, si après perturbation, le système s'en éloigne davantage.
- L'état d'équilibre est dit *simplement stable* si après perturbation, le système reste dans un voisinage du point d'équilibre.

Pour illustrer ces trois cas, l'on procède très souvent à une analogie mécanique. Cette dernière consiste à décrire l'état d'équilibre d'une bille dans trois positions différentes comme le montre la Fig.2.7.

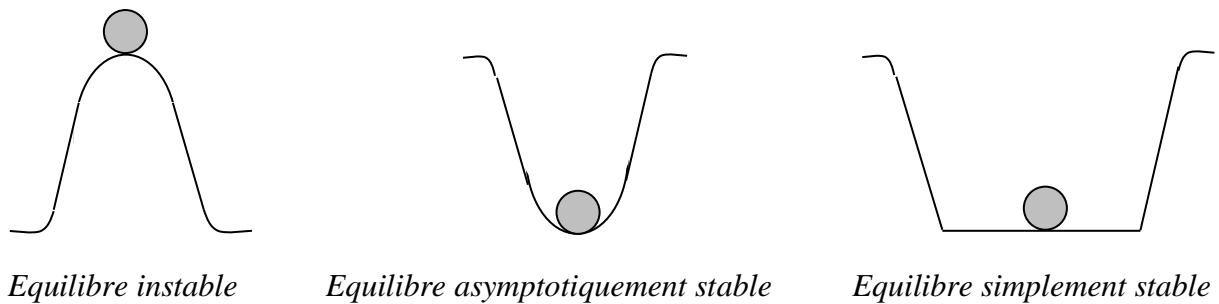


Fig.2.7 Les trois états d'équilibre possibles d'une bille.

Soit $x_e = 0$ un état d'équilibre. En partant de cet état, on donne, à $t = 0$ un écart Δx . On obtient l'état $x(t) = x_e + \Delta x$. Le système est stable (asymptotiquement stable) si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e = 0 \quad (2.46)$$

En partant de $x(t) = x_e$ écarté de Δx , l'état $x(t)$ tend à revenir à l'état d'équilibre x_e .

La réponse du système dans ce cas est la réponse libre :

$$\begin{aligned} x(t) = x_{\text{libre}}(t) &= \Phi(t) \Delta x \\ &= e^{At} \Delta x \end{aligned} \quad (2.47)$$

Pour simplifier les développements, on suppose que le système est sous forme canonique de Jordan (A diagonale) et possède n valeurs propres distinctes:

$$x(t) = e^{At} \Delta x = \text{diag} (e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \Delta x \quad (2.48)$$

La condition de stabilité exige que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{diag} (e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \Delta x = 0 \quad (2.49)$$

Ceci est vérifié si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative ($\lambda_i < 0, i = 1 \dots n$).

Théorème 2.2 : Un système linéaire et invariant décrit par une représentation d'état est dit :

- *asymptotiquement stable* si toutes les valeurs propres de la matrice dynamique A sont à partie réelle strictement négative.
- *simplement stable* si au moins une des valeurs propres de A est nulle (ou à partie réelle nulle).
- *instable* si au moins une des valeurs propres de A est à partie réelle strictement positive.

Remarque 2.9 :

- On constate que la stabilité d'un modèle d'état dépend seulement de la matrice dynamique A .
- Un système est BIBO stable s'il est asymptotiquement stable.

Dans la suite de ce cours, on qualifie un système *asymptotiquement stable* par le mot *stable*.

9. Exercices

Exercice 1 Soit un système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

- 1- Donner une représentation d'état pour le système.
- 2- Calculer les valeurs propres (λ_1, λ_2). Le système est-il stable?
- 3- Calculer les vecteurs propres associés ($z = [z_1 \ z_2]^T, v = [v_1 \ v_2]^T$). Montrer que $A = T\Delta T^{-1}$ où $T = [z \ v]$ et $\Delta = \text{diag}[\lambda_i]$.
- 4- Calculer la matrice de transition e^{At} en utilisant la méthode de la diagonalisation de A .
- 5- Calculer la réponse impulsionnelle du système pour $x_0 = [1 \ 0]^T$.

Exercice 2 Soit la représentation d'état d'un système donné :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- 1- Le système est-il stable ?
- 2- Calculer la matrice de transition e^{At} en utilisant :
 - a- La méthode de Sylvester, b- La méthode de Cayley-Hamilton.
- 3- Calculer la réponse indicielle du système avec la condition initiale: $x_0 = [0 \ 1]^T$.

Exercice 3 Soit la représentation d'état d'un système donné:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad \text{avec : } \begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \dot{x}_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

- 1- Calculer les valeurs propres ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$). Le système est-il stable?
- 2- Calculer les vecteurs propres associés ($z = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T, v = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T, w = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T$). Montrer que $A = T\Delta T^{-1}$ où $T = [z \ v \ w]$ et $\Delta = \text{diag}[\lambda_i]$.

- 3- Calculer la réponse indicielle du système (en utilisant la méthode de diagonalisation de A pour calculer e^{At}), calculer la valeur finale $y_f = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$, avec $x_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$.