

Chapitre 3

Commandabilité et observabilité

1. Introduction

En effet, l'utilisation de la représentation d'état suscite deux questions importantes :

- 1- Est-ce que pour tout couple $x_0 = x(t_0)$ et $x_1 = x(t_1)$, il existe un vecteur de commande $u(t)$ défini sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ permettant de passer de l'état x_0 à l'état x_1 , c'est le problème de commandabilité du système.
- 2- Est-ce que la connaissance de $y(t)$ et de $u(t)$ sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ permet d'obtenir $x_0 = x(t_0)$, c'est le problème d'observabilité du système.

Ces deux propriétés sont nécessaires que ce soit pour la commande où il faudra que le système soit commandable, ou pour la synthèse d'observateur où il faudra que le système soit observable. Pour cela, il sera nécessaire de partir d'une représentation d'état minimale (commandable et observable) en éliminant (du modèle) les parties non commandables et non observables à la condition impérative que celles-ci soient asymptotiquement stables.

2. Cas des systèmes monovariabiles

Considérons un système monovariabiles linéaire et stationnaire représenté par le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

2.1 Commandabilité

Un système décrit par un modèle d'état est dit *commandable* si pour tout état x_f du vecteur d'état, il existe un signal d'entrée $u(t)$ d'énergie finie qui permet au système de passer de l'état initial x_0 à l'état x_f en un temps fini.

Un système est dit *complètement commandable* s'il est commandable à tout point de l'espace d'état.

Théorème 1 : Critère de commandabilité de Kalman

Un système linéaire est complètement commandable si et seulement si : $\text{rang}[Q_c] = n$, c-à-d, Q_c est régulière où n est l'ordre du système (nombre de variables d'état) et

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

est dite matrice de commandabilité.

Exemple 3.1 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[0 \quad 1]}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}}$$

$$Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(Q_c) = 2 \neq 0$$

Le système est commandable.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_B u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X$$

$$Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(Q_c) = 0$$

Le système n'est pas commandable.

2.2 Observabilité

On dit qu'un état $x(t_0)$ est *observable*, s'il peut être identifié à partir de la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ sur un intervalle de temps fini $[t_0, t_1]$.

Le système est dit *complètement observable* si $\forall X(t_0) \in \text{l'espace d'état}$, il est possible de restituer ou identifier sa valeur à partir de la seule connaissance de $u(t)$ et $y(t)$.

Théorème 2 : Critère d'observabilité de Kalman

Un système linéaire est complètement observable si et seulement si : $\text{rang}[Q_o] = n$, c-à-d, Q_o est régulière, où n est l'ordre du système (nombre de variables d'état) et

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

est dite matrice d'observabilité.

Exemple 3.2 :

Etudier l'observabilité des deux systèmes donnés dans l'exemple 3.1.

Premier système : $Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(Q_c) = -2 \neq 0$.

Deuxième système : $Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(Q_c) = 1 \neq 0$.

Les deux systèmes sont observables.

Remarque 2.1 :

- La Commandabilité d'un système est liée seulement aux matrices A et B .
- L'observabilité d'un système est liée seulement aux matrices A et C .
- Si la matrice A est *diagonale*, le système est complètement commandable si tous les éléments de B sont non nuls. le système est complètement observable si tous les éléments de C sont non nuls.
- Il est possible que : $\text{rang}[Q_c] = r < n$, donc, la commandabilité ne se vérifie que pour une partie du vecteur d'état (r variables d'état). Les r variables d'état sont les variables d'états commandables du système et les $n-r$ variables d'état sont les variables non commandables du système, dans ce cas le système est dit *partialement commandable* et sa commande consiste à rendre sa partie non commandable inopérante afin de le contrôler entièrement via sa partie commandable. De même il est possible que $\text{rang}[Q_o] < n$, donc l'observabilité ne se vérifie que pour une partie du vecteur d'état.

2.3 Commandabilité/observabilité et fonction de transfert

Dans cette partie, on montre la relation entre la fonction de transfert et ces deux propriétés (commandabilité et observabilité) à travers un exemple. Soit un système d'ordre 4 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_X$$

A est diagonale, donc :

La variable d'état x_1 : est commandable et observable (CO)

La variable d'état x_2 : est commandable et non observable (CNO)

La variable d'état x_3 : est non commandable et observable (NCO)

La variable d'état x_4 : est non commandable et non observable (NCNO)

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \Rightarrow X_1(s) = U(s)/(s + 1)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t) \Rightarrow X_2(s) = U(s)/(s + 2)$$

$$\dot{x}_3(t) = -3x_3(t) \Rightarrow X_3(s)(s + 3) = 0$$

$$\dot{x}_4(t) = -4x_4(t) \Rightarrow X_4(s)(s + 4) = 0$$

$$y(t) = x_1(t) + x_3(t) \Rightarrow U(s) = x_1(s) + x_3(s)$$

Le système peut être décomposé en quatre sous-systèmes (CO, CNO, NCO, NCNO) comme :

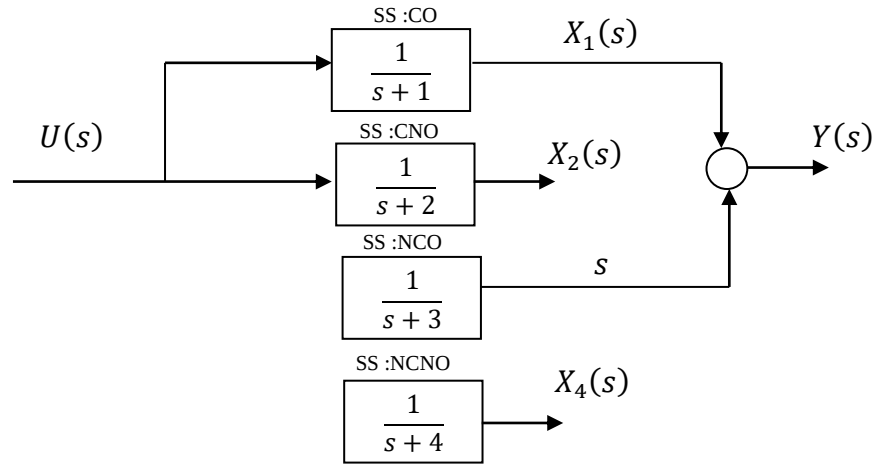


Fig.3.1 Différents modes d'un système.

On calcule la fonction de transfert :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

Cependant, d'après la représentation d'état ce système est d'ordre 4, donc, on peut écrire :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

Remarque 3.2

- Les modes (pôles) qui se compensent avec des zéros sont les modes non commandables, non observables ou non commandable et non observables. Donc, un système dont la fonction de transfert possède des zéros qui se compensent avec des pôles est un système non commandable et/ou non observable.
- Un système dont la fonction de transfert a tous ses zéros différents de ses pôles est un système commandable et observable.
- La commandabilité et l'observabilité sont des propriétés structurelles du système qui n'apparaissent pas dans la représentation par fonction de transfert. Donc, la fonction de transfert est quelques fois insuffisante pour décrire un système.
- Un système à la fois commandable et observable est dit *minimal*.
- L'ordre de la représentation d'état n'est pas toujours le même que celui de la fonction de transfert. Tout dépend de la commandabilité et de l'observabilité de ce dernier. Lorsqu'il est complètement commandable et observable, les deux ordres sont égaux.

2.4 Formes canoniques pour les systèmes monovariabiles

En général, on désigne par *forme canonique* d'un système linéaire continu une représentation d'état dont les matrices A, B et C ont une forme très simple et par conséquent, possèdent un nombre réduit d'éléments différents de zéro dans leurs structures. Les formes canoniques les plus connues et utilisées sont : la *forme compagne de commandabilité* et la *forme compagne d'observabilité*. Comme on va le voir plus tard ces deux formes seront très utiles, quand on étudie le problème de la commande et de l'observation.

Soit la fonction de transfert d'un système donné, le système est supposé commandable et observable, donc, la fonction de transfert n'admet pas de pôles et zéros communs.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad n \geq m \quad (3.2)$$

2.4.1 Forme compagne de commandabilité

En effet, si le système est commandable, on peut le mettre sous une forme d'état dite *forme compagne de commandabilité*.

$$G(s) = \frac{V(s)Y(s)}{U(s)V(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.3)$$

où $V(s)$ correspond à une variable interne au système, telle que :

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.4)$$

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \dots + b_1 s + b_0 \quad (3.5)$$

A partir de (3.4), il vient :

$$s^n V(s) = U(s) - a_{n-1} \underbrace{s^{n-1} V(s)}_{x_n(s)} - \dots - a_1 \underbrace{s V(s)}_{x_2(s)} - a_0 \underbrace{V(s)}_{x_1(s)} \quad (3.6)$$

On peut choisir les variables d'état de la façon suivante :

$$X_1(s) = V(s)$$

$$X_2(s) = sV(s) = sX_1(s) \xRightarrow{TL^{-1}} \dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

...

$$X_n(s) = s^{n-1} V(s) = sX(s) \xRightarrow{TL^{-1}} \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t)$$

On multiplie la dernière équation par s et en utilisant (3.6), on aura :

$$sX_n(s) = U(s) - a_{n-1}X_n(s) - \dots - a_1X_2(s) - a_0X_1(s)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_n(t) = u(t) - a_{n-1}x_n(t) - \dots - a_1x_2(t) - a_0x_1(t)$$

A partir de (3.5), on obtient :

$$\begin{cases} Y(s) = V(s) (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \dots + b_1 s + b_0) \\ Y(s) = b_m X_{m+1}(s) + b_{m-1} X_m(s) \dots + b_1 X_2(s) + b_0 X_1(s) \\ \Rightarrow y(t) = b_m x_{m+1}(t) + b_{m-1} x_m(t) \dots + b_1 x_2(t) + b_0 x_1(t) \end{cases}$$

Ceci conduit à la forme compagne commandable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Remarque 3.3

- La matrice d'évolution A contient tous les coefficients $(-a_i)$ du dénominateur de la fonction de transfert en une seule ligne, ce sont les coefficients du polynôme caractéristique $(sI - A)$ de la matrice A .
- Bien qu'une seule variable d'état x_n soit directement influencée par le signal de commande (entrée), les autres variables le sont mais indirectement par intégration successive.

Exemple 3.3

Trouver la forme compagne de commandabilité du système défini par la fonction de transfert suivante :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 4s + 1}{s^3 + 2s^2 + s}$$

$$\frac{V(s)Y(s)}{U(s)V(s)} = \frac{2s^2 + 4s + 1}{s^3 + 2s^2 + s}$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s} \quad (3.7)$$

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = 2s^2 + 4s + 1 \quad (3.8)$$

A partir de (3.7), il vient :

$$s^3 V(s) = U(s) - 2 \underbrace{s^2 V(s)}_{X_3(s)} - \underbrace{s V(s)}_{X_2(s)} - 0 \underbrace{V(s)}_{X_1(s)} \quad (3.9)$$

On pose :

$$X_1(s) = V(s)$$

$$X_2(s) = sV(s) = sX_1(s) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$X_3(s) = s^2 V(s) = sX_2(s) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

On multiplie la dernière équation par S et en utilisant (3.9) :

$$sX_3(s) = s^3 V(s) = U(s) - 2X_3(s) - X_2(s) \Rightarrow \dot{x}_3(t) = u(t) - 2x_3(t) - x_2(t)$$

A partir de (3.8), on obtient :

$$Y(s) = 2s^2 V(s) + 4sV(s) + V(s)$$

$$Y(s) = 2x_3(s) + 4x_2(s) + x_1(s)$$

$$y(t) = 2x_3(t) + 4x_2(t) + x_1(t)$$

D'où la forme compagne commandable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 4 \ 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2.4.2 Forme compagne d'observabilité

Si le système est observable, on peut le mettre sous une forme d'état dite *forme compagne d'observabilité*.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad n \geq m$$

On divise le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert par s^n .

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{m-n} + b_{m-1} s^{m-n-1} + \dots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \dots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$Y(s)[1 + a_{n-1} s^{-1} + \dots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}] = [b_m s^{m-n} + \dots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n}]U(s)$$

$$Y(s) = -[a_{n-1} s^{-1} + \dots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}]Y(s) + [b_m s^{m-n} + \dots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n}]U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{(\dots \underbrace{(b_0 U - a_0 Y)s^{-1}}_{X_1(s)} + b_1 U - a_1 Y)s^{-1} + \dots)}_{X_2(s)} + \underbrace{b_m U - a_m Y}_{X_{m+1}(s)} s^{-1} - \underbrace{a_{m+1} Y}_{X_{m+2}(s)} s^{-1} - \dots s^{-1} - \underbrace{a_{n-1} Y}_{X_n(s)} s^{-1}$$

On pose :

$$Y(s) = X_n(s) \Rightarrow y(t) = x_n(t)$$

$$X_1(s) = [b_0 U(s) - a_0 Y(s)]s^{-1} = [b_0 U(s) - a_0 X_n(s)]s^{-1} \Rightarrow \dot{x}_1(t) = -a_0 x_n(t) + b_0 u(t)$$

$$X_2(s) = [X_1(s) + b_1 U(s) - a_1 X_n(s)]s^{-1} \Rightarrow \dot{x}_2(t) = x_1(t) - a_1 x_n(t) + b_1 u(t)$$

....

$$X_{m+1}(s) = [X_m(s) + b_m U(s) - a_m X_n(s)]s^{-1} \Rightarrow \dot{x}_{m+1}(t) = x_m(t) - a_m x_n(t) + b_m u(t)$$

$$X_{m+2}(s) = [X_{m+1}(s) - a_{m+1} X_n(s)]s^{-1} \Rightarrow \dot{x}_{m+2}(t) = x_{m+1}(t) - a_{m+1} x_n(t)$$

....

$$X_n(s) = [X_{n-1}(s) - a_{n-1} X_n(s)]s^{-1} \Rightarrow \dot{x}_n(t) = x_{n-1}(t) - a_{n-1} x_n(t)$$

Ceci conduit à la forme compagne observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Exemple 3.4 : Trouver la forme compagne d'observabilité du système défini par la fonction de transfert suivante :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 4s + 1}{s^3 + 2s^2 + s}$$

On divise le numérateur et le dénominateur par s^3

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^{-1} + 4s^{-2} + s^{-3}}{1 + 2s^{-1} + s^{-2}}$$

$$Y(s)[1 + 2s^{-1} + s^{-2}] = [2s^{-1} + 4s^{-2} + s^{-3}]U(s)$$

$$Y(s) = -[2s^{-1} + s^{-2}]Y(s) + [2s^{-1} + 4s^{-2} + s^{-3}]U(s)$$

$$Y(s) = -2Y(s)s^{-1} - Y(s)s^{-2} + 2U(s)s^{-1} + 4U(s)s^{-2} + U(s)s^{-3}$$

$$Y(s) = \underbrace{[U(s)s^{-1} + 4U(s) - Y(s)]s^{-1} + 2U(s) - 2Y(s)}_{X_3(s)}s^{-1}$$

On pose :

$$Y(s) = X_3(s) \Rightarrow y(t) = x_3(t)$$

$$X_1(s) = U(s)s^{-1} \Rightarrow \dot{x}_1(t) = u(t)$$

$$X_2(s) = [X_1(s) + 4U(s) - X_3(s)]s^{-1} \Rightarrow \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_3(t) + 4u(t)$$

$$X_3(s) = [X_2(s) + 2U(s) - 2X_3(s)]s^{-1} \Rightarrow \dot{x}_3(t) = x_2(t) - 2x_3(t) + 2u(t)$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2.5 Passage d'une réalisation à l'autre

2.5.1 Changement de base

On peut passer d'une forme d'état à une autre tout simplement par un changement de base dans l'espace d'état R^n . Considérons l'équation d'état (pour des raisons de lisibilité, on omet la variable t) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ y &= C x \end{aligned}$$

On peut appliquer au vecteur d'état x un changement de repère de sorte à obtenir un nouveau vecteur d'état $\tilde{x}$. Ainsi, soit le changement de base $x = M \tilde{x}$ où M est une matrice de *rang plein* appelée matrice de passage, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= M^{-1} A M \tilde{x} + M^{-1} B u \\ y &= C M \tilde{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} u \\ y &= \tilde{C} \tilde{x} \end{aligned}$$

où $\tilde{A} = M^{-1} A M$, $\tilde{B} = M^{-1} B$, $\tilde{C} = C M$. Comme il existe une infinité de matrices de passage M utilisables, il existe aussi une infinité de formes équivalentes qui correspondent toutes à la même fonction de transfert. En effet :

$$\begin{aligned} \tilde{G}(S) &= \tilde{C}(SI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} + \tilde{D} = CM(SI - M^{-1} A M)^{-1} M^{-1} B + D \\ &= CM(M^{-1}(SI - A) M)^{-1} M^{-1} B + D = C(SI - A)^{-1} B + D = G(S) \end{aligned}$$

Remarque 3.4:

- En outre, puisque $\tilde{A} = M^{-1} A M$, les valeurs propres de la matrice d'état (A ou $\tilde{A}$) sont les mêmes quelle que soit la forme considérée. De ce fait, ce sont toujours les pôles de $G(S)$, c-à-d, les racines du polynôme caractéristique.
- Le passage d'une forme à une autre peut se révéler utile quand la seconde forme a une forme particulière (facilitant les calculs ou montrant certaines caractéristiques du système).

2.5.2 Obtention d'une forme compagne de commandabilité

Considérons une représentation d'état quelconque :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ y &= C x \end{aligned} \tag{3.10}$$

Si le système est commandable, on peut le mettre sous forme compagne de commandabilité :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} u \\ y &= \tilde{C} \tilde{x} \end{aligned} \tag{3.11}$$

tel que :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_0 & -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ 0 \ \dots \ 0]$$

$x = M\tilde{x}$ (M matrice carrée de dimension n inversible)

En remplaçant $x = M\tilde{x}$ dans (3.10), on aura :

$$\begin{aligned} M\dot{\tilde{x}} &= A M\tilde{x} + Bu & \Rightarrow & \quad \dot{\tilde{x}} = M^{-1}A M\tilde{x} + M^{-1}Bu \\ y &= CM\tilde{x} & & \quad y = CM\tilde{x} \end{aligned}$$

d'où $\tilde{A} = M^{-1}A M$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$

Calcul de la matrice de passage M

$$\tilde{A} = M^{-1}A M \Rightarrow \tilde{A}M^{-1} = M^{-1}A$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{-1}(1) \\ M^{-1}(2) \\ M^{-1}(3) \\ \vdots \\ M^{-1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1}(1) \\ M^{-1}(2) \\ M^{-1}(3) \\ \vdots \\ M^{-1}(n) \end{bmatrix} A$$

où $M^{-1}(i)$ est la ligne i de M , avec : $i=1 \dots n$.

$$M^{-1}(2) = M^{-1}(1)A$$

$$M^{-1}(3) = M^{-1}(2)A = M^{-1}(1)A^2$$

$$M^{-1}(4) = M^{-1}(3)A = M^{-1}(1)A^3$$

$\vdots$

$\vdots$

$$M^{-1}(n) = M^{-1}(n-1)A = M^{-1}(1)A^{n-1}$$

$$-a_0M^{-1}(1) - a_1M^{-1}(2) - a_2M^{-1}(3) - \dots - a_{n-1}M^{-1}(n) = M^{-1}(n)A$$

$$-a_0M^{-1}(1) - a_1M^{-1}(1)A - a_2M^{-1}(1)A^2 - \dots - a_{n-1}M^{-1}(1)A^{n-1} = M^{-1}(1)A^n$$

$$M^{-1}(1) \underbrace{[A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I]}_{=0} = 0$$

(Selon le théorème de Cayley-Hamilton)

$$\tilde{B} = M^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1}(1) \\ M^{-1}(2) \\ M^{-1}(3) \\ \vdots \\ M^{-1}(n) \end{bmatrix} B \Leftrightarrow \begin{aligned} M^{-1}(1)B &= 0 & M^{-1}(1)B &= 0 \\ M^{-1}(2)B &= 0 & M^{-1}(1)AB &= 0 \\ M^{-1}(3)B &= 0 & M^{-1}(1)A^2B &= 0 \\ & & & \\ M^{-1}(n)B &= 1 & M^{-1}(1)A^{n-1}B &= 1 \end{aligned}$$

$$M^{-1}(1) \underbrace{[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-2}B \ A^{n-1}B]}_{Q_c} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$$

$$M^{-1}(1) Q_c = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \Rightarrow M^{-1}(1) = Q_c^{-1}(n) \text{ (n-ième ligne de } Q_c^{-1} \text{)}$$

Résumé: Calcul de la matrice de passage M vers une forme compagne de commandabilité à partir d'une forme quelconque

- 1- Calculer la matrice de Commandabilité Q_c , si le système est commandable, c-à-d $|Q_c| \neq 0$, alors, suivre les étapes suivantes :
- 2- Calculer Q_c^{-1}
- 3- Mettre $M^{-1}(1) = Q_c^{-1}(n)$: c à d, 1-ière ligne de $M^{-1} = n$ -ième ligne de Q_c^{-1}
- 4- Calculer les autres lignes de M comme suit :

$$\begin{aligned} M^{-1}(2) &= M^{-1}(1)A \\ M^{-1}(3) &= M^{-1}(1)A^2 \\ M^{-1}(4) &= M^{-1}(1)A^3 \\ &\vdots \\ M^{-1}(n) &= M^{-1}(1)A^{n-1} \end{aligned}$$

2.5.3 Obtention d'une forme compagne d'observabilité

Considérons une représentation d'état quelconque :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ y &= C x \end{aligned}$$

Si le système est observable, on peut le mettre sous forme compagne observable :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} u \\ y &= \tilde{C} \tilde{x} \end{aligned}$$

tel que :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

$x = N \tilde{x}$ (N matrice carrée de dimension n inversible)

En remplaçant $x = N \tilde{x}$ dans l'équation d'état et l'équation de sortie, on aura :

$$\begin{aligned} N \dot{\tilde{x}} &= A N \tilde{x} + B u \\ y &= C N \tilde{x} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= N^{-1} A N \tilde{x} + N^{-1} B u \\ y &= C N \tilde{x} \end{aligned}$$

d'où $\tilde{A} = N^{-1} A N$, $\tilde{B} = N^{-1} B$, $\tilde{C} = C N$

2.5.4 Concept de dualité

Il existe une analogie entre les formes compagne commandable et compagne observable, cette analogie est liée à la notion de *dualité*. On appellera systèmes duaux deux systèmes définis respectivement par les équations :

Système S	Système S^*
$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ $y(t) = Cx(t)$	$\dot{x}^*(t) = A^T x^*(t) + C^T u(t)$ $y^*(t) = B^T x^*(t)$

Ces systèmes sont tels que :

- Si S est commandable, alors S^* est observable.
- Si S est observable, S^* est commandable.

Il est donc possible de tester l'observabilité d'un système en vérifiant la commandabilité de système dual.

Résumé : passage d'une forme quelconque vers une forme compagne d'observabilité

1- Soit un système $S : (A, B, C)$.

2- Calculer le système dual $S^* : (A^* = A^T, B^* = C^T, C^* = B^T)$

3- Calculer la matrice de passage M^* (M^{*-1}) pour rendre le système S^* sous forme compagne de commandabilité. Le système obtenu $\tilde{S}^* : (\tilde{A}^* = (M^{*-1} A^* M^*, \tilde{B}^* = (M^{*-1} B^*, \tilde{C}^* = C^* M^*)$

4- Calculer le système dual du système $\tilde{S}^*$, le système obtenu $\tilde{S} : (\tilde{A} = \tilde{A}^{*T}, \tilde{B} = \tilde{C}^{*T}, \tilde{C} = \tilde{B}^{*T})$ est sous forme compagne d'observabilité.

3. Cas des systèmes multivariables

3.1 Commandabilité

Soit un système multivariable linéaire représenté par le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

avec : $u(t) \in R^m, y(t) \in R^p, A(n \times n), B(n \times m), C(p \times n)$ et $D(p \times m)$

Suivant le critère de commandabilité de Kalman, le système est commandable si et seulement si $\text{rang}[Q_c] = n$.

$$Q_c = [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B]$$

On a : $B = [b_1 \ \dots \ b_m]$

$$Q_c = [|b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m| |Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_m| |A^2 b_1 \ A^2 b_2 \ \dots \ A^2 b_m| \ \dots \ |A^{n-1} b_1 \ A^{n-1} b_2 \ \dots \ A^{n-1} b_m|]$$

Dans un système multi-entrées ($m > 1$), la matrice Q_c n'est pas carrée ($Q_c((n) \times (nxm))$), et pour que le système soit commandable, il faudra trouver n vecteurs linéairement indépendants dans Q_c en utilisant la méthode suivante (méthode d'indice de commandabilité).

3.1.1 Indice commandabilité

L'indice de commandabilité (IC) n_i relatif à l'entrée u_i est le nombre d'états que l'on peut commander par la seule entrée u_i .

a. Choix par lignes

1- On construit le tableau suivant :

b_1	b_2	b_3	...	b_m	
X	X	X	...	X	A^0
X	0	X	...	X	A^1
0		0	...	X	
			$\vdots$		
			...		A^{n-1}

- 2- On remplit le tableau ligne par ligne,
- 3- On indique les vecteurs linéairement indépendants en mettant une croix (X) dans leurs cellules correspondantes
- 4- Une fois un vecteur linéairement dépendant aux vecteurs précédents est trouvé, on met dans sa cellule un zéro (0). Toutes les cellules se trouvant au-dessous de cette cellule sont laissées vides car les vecteurs correspondants sont aussi linéairement dépendants.
- 5- On arrête la procédure dès qu'on trouve n vecteurs linéairement indépendants (n croix dans le tableau).
- 6- L'indice de commandabilité n_i relatif à l'entrée u_i est égal au nombre de croix (X) dans la colonne b_i .

b. Choix par colonnes

Dans ce cas on remplit le tableau colonne par colonne en suivant la même procédure.

3.1.2 Critère de commandabilité des systèmes multivariables

- On calcule les indices de commandabilité n_i , ($i = 1 \dots m$).
- Le système est dit commandable si $\sum_{i=1}^m n_i = n$.
- Dans ce cas, la matrice de commandabilité Q_c se réduit à la matrice carrée régulière suivante :

$$Q_c = [b_1 \ Ab_1 \dots A^{n_1-1}b_1 \mid b_2 \ Ab_2 \dots A^{n_2-1}b_2 \mid \dots \mid b_m \ Ab_m \dots A^{n_m-1}b_m]$$

- On peut décomposer le système en m sous-systèmes chacun d'ordre n_i commandable par u_i .

Exemple 3.5 : Soit un système à deux entrées :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Trouver les indices de commandabilité de u_1 et u_2 et tester la commandabilité du système.

$$Q_c = [b_1 \ b_2 \ Ab_1 \ Ab_2 \ A^2b_1 \ A^2b_2 \ A^3b_1 \ A^3b_2]$$

$$Q_c = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & Ab_1 & Ab_2 & A^2b_1 & A^2b_2 & A^3b_1 & A^3b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 7 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

Choix par lignes

b_1	b_2	
X	X	A^0
X	X	A^1
0		A^2
		A^3

Les indices de commandabilité sont : $n_1 = 2$, $n_2 = 2$.

On a : $\sum_{i=1}^2 n_i = 4$, le système est commandable.

Choix par colonnes

b_1	b_2	
X	X	A^0
X		A^1
X		A^2
0		A^3

Les indices de commandabilité sont : $n_1 = 3, n_2 = 1$.

On a : $\sum_{i=1}^2 n_i = 4$, le système est commandable.

3.1.3 Sous espace de commandabilité

Si $\text{rang}(Q_c) = r < n$, alors on a :

r états commandables et $n - r$ états non commandables.

Par définition, le sous-espace de commandabilité est composé de r états commandables.

Théorème : Décomposition canonique d'un système non commandable

Si le système n'est pas commandable, il existe une matrice T inversible tel que : $z = Tx$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_C \\ \dot{z}_{NC} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_C \\ z_{NC} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} z_C \\ z_{NC} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec : $A_1(r \times r)$, $A_2(r \times (n - r))$, $A_3((n - r) \times (n - r))$. z_C contient les r états commandables et z_{NC} contient les $n - r$ états non commandables.

Cherchons la fonction de transfert du système :

$$\begin{aligned} H(S) &= C(SI - A)^{-1}B \\ A &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [C_1 \quad C_2] \\ (SI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} (SI - A_1)^{-1} & A_2(SI - A_1)^{-1}(SI - A_3)^{-1} \\ 0 & (SI - A_3)^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

alors :

$$H(S) = C_1(SI - A_1)^{-1}B_1$$

On remarque que la fonction de transfert ne dépend que des pôles de sous-système commandable.

3.1.4 Commandabilité de la sortie

On dit que la sortie d'un système est commandable, s'il existe une commande admissible qui peut ramener le système d'un état y_0 à t_0 à un état y_1 en un temps fini. Une condition nécessaire et suffisante est:

$$\text{rang}(Q_s) = [C \quad CAB \quad CA^2B \quad Ab_2 \quad \dots \quad CA^{n-1}B] = p$$

où p est le nombre de sorties du système.

3.2 Observabilité

Suivant le critère d'observabilité de Kalman, le système est observable si et seulement si $\text{rang}[Q_o] = n$.

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \\ c_1 A \\ \vdots \\ c_p A \\ c_1 A^2 \\ \vdots \\ c_p A^2 \\ \vdots \\ c_1 A^{n-1} \\ \vdots \\ c_p A^{n-1} \end{bmatrix}$$

Dans un système multi-sorties ($p > 1$), la matrice Q_o n'est pas carrée ($Q_o((pxn) \times n)$), et pour que le système soit observable, il faudra trouver n vecteurs linéairement indépendants dans Q_o en utilisant la méthode suivante (méthode d'indice d'observabilité).

3.2.1 Indice d'observabilité

L'indice d'observabilité (IO) τ_i relatif à la sortie y_i est le nombre d'états que l'on peut observer en connaissant y_i et u . Pour le calcul de l'indice d'observabilité, on suit la même procédure utilisée pour le calcul de l'indice de commandabilité en remplaçant les b_i par les c_i dans le tableau.

3.2.2 Critère d'observabilité des systèmes multivariables

- On calcule les indices d'observabilité τ_i , ($i = 1 \dots p$).
- Le système est dit observable si $\sum_{i=1}^p \tau_i = n$.
- Dans ce cas, la matrice d'observabilité Q_o se réduit à la matrice carrée régulière suivante :

$$Q_o = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 A \\ \vdots \\ c_1 A^{\tau_1-1} \\ c_2 \\ c_2 A \\ \vdots \\ c_2 A^{\tau_2-1} \\ \vdots \\ c_p \\ c_p A \\ \vdots \\ c_p A^{\tau_p-1} \end{bmatrix}$$

Exemple 3.6 : Soit un système à deux entrées :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -3 & -4 & 6 \\ -3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Trouver les indices d'observabilité de y_1 et y_2 et tester l'observabilité du système.

$$Q_o = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1 A \\ c_2 A \\ c_1 A^2 \\ c_2 A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -4 & 6 \\ -4 & -6 & 8 \\ -3 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Choix par lignes

c_1	c_2	
X	X	A^0
0	0	A^1
		A^2

On a : $c_1 A = 5c_1 - 3c_2$ et $c_2 A = c_1 A - c_2 + c_1$, alors : $\text{rang}(Q_o) = 2$.

Les indices d'observabilité sont : $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1$.

$\sum_{i=1}^2 \tau_i = 2$, le système n'est observable.

3.2.3 Sous espace d'observabilité

Si $\text{rang}(Q_o) = r < n$, alors on a :

r états observables et $n - r$ états non observables.

Par définition, le sous-espace d'observabilité est composé de r états observables.

Théorème : Décomposition canonique d'un système non observable

Si le système n'est pas observable, il existe une matrice T_1 inversible tel que : $z = T_1 x$.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_o \\ \dot{z}_{NO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_o \\ z_{NO} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_o \\ z_{NO} \end{bmatrix}$$

avec : $A_1(r \times r)$, $A_2(r \times (n - r))$, $A_3((n - r) \times (n - r))$. z_o contient les r états observables et z_{NO} contient les $n - r$ états non observables.

Cherchons la fonction de transfert du système :

$$\begin{aligned} H(S) &= C(SI - A)^{-1} B \\ &= C_1(SI - A_1)^{-1} B_1 \end{aligned}$$

On remarque que la fonction de transfert ne dépend que des pôles de sous-système observable.

3.3 Décomposition canonique d'un système multivariable

L'espace d'état peut être décomposé en quatre sous-espaces Z_{CNO} , Z_{CO} , Z_{NCNO} et Z_{NCO} .

- 1- Z_{CNO} contient les états commandables et non observables,
- 2- Z_{CO} contient les états commandables et observables,
- 3- Z_{NCNO} contient les états non commandables et non observables,
- 4- Z_{NCO} contient les états non commandables et observables.

Donc, les équations d'état peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_{CNO} \\ \dot{Z}_{CO} \\ \dot{Z}_{NCNO} \\ \dot{Z}_{NCO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{CNO} \\ Z_{CO} \\ Z_{NCNO} \\ Z_{NCO} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad C_2 \quad 0 \quad C_4] \begin{bmatrix} Z_{CNO} \\ Z_{CO} \\ Z_{NCNO} \\ Z_{NCO} \end{bmatrix}$$

$$H(S) = C_2(SI - A_{22})^{-1}B_2$$

Les états non commandables et/ou non observables n'apparaissent pas dans la fonction de transfert.

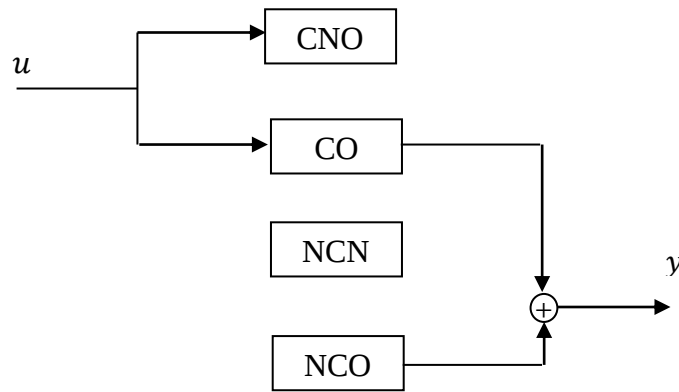


Fig.3.2 Décomposition canonique d'un système.

3.4 Formes compagnes (formes canoniques) pour les systèmes multivariables

Dans cette section trois décompositions fondamentales seront étudiées :

1. Décomposition en r sous-systèmes mono-entrée commandables avec: $r < m$, où m est le nombre d'entrées.
2. Décomposition en m sous-systèmes mono-entrée commandables.
3. Décomposition en p sous systèmes mono-sortie observables, où p est le nombre de sorties.

Les deux premières décompositions ont pour but de mettre sous une forme particulière l'ensemble des matrices A et B et on verra leurs importances dans l'étude du problème de commande par retour d'état. La troisième décomposition a pour but de simplifier les formes de A et C et sera utilisée dans le problème d'observation d'état.

3.4.1 Décomposition en $r < m$ sous systèmes mono-entrée commandables

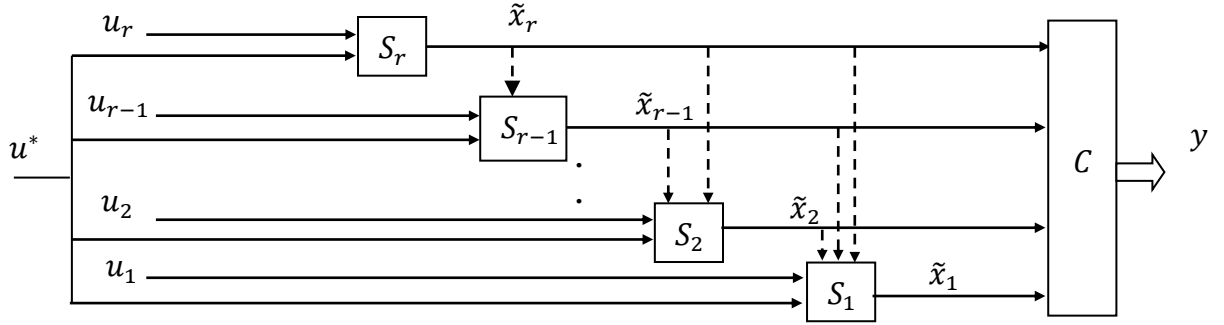
On cherche à décomposer le système global de dimension n et possédant m entrées en un nombre de sous-systèmes r avec $r < m$ tel que :

- Chaque sous-système soit commandable par une seule entrée,
- Ils soient hiérarchisés de telle sorte que :

$$\begin{aligned} S_r & \text{ agisse sur } S_{r-1} \dots S_1, \\ S_{r-1} & \text{ agisse sur } S_{r-2} \dots S_1, \\ & \dots \\ S_2 & \text{ agisse sur } S_1. \end{aligned}$$

Il est à noter que les $m - r$ composantes de u soit $u^* = [u_{r+1} \dots u_m]^T$ peuvent éventuellement agir sur tous les sous-systèmes.

On désigne par n_i la dimension du sous-système i et par $\tilde{x}_i$ son vecteur d'état.



L'équation d'état du sous-système S_i est donc de la forme :

$$\dot{\tilde{x}}_i = \tilde{A}_{ii}\tilde{x}_i + [\tilde{A}_{i,i+1}\tilde{x}_{i+1} \dots + \tilde{A}_{ir}\tilde{x}_r] + B_i u_i + B^* u^*$$

La quantité entre crochet traduit l'interaction sur le sous-système S_i des sous-systèmes S_{i+1} jusqu'à S_r . Donc, les matrices $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont sous la forme triangulaire :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \dots & \tilde{A}_{1r} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \dots & \tilde{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{r1} & \tilde{A}_{r2} & \dots & \tilde{A}_{rr} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 & B_1^* \\ 0 & b_2 & \dots & 0 & B_2^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_r & B_r^* \end{bmatrix}$$

avec :

$$\tilde{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0^i & -a_1^i & \dots & -a_{n_i-1}^i \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique globale est sous la forme :

$$|SI - \tilde{A}| = \prod_{i=1}^r |SI - \tilde{A}_{ii}| = \prod_{i=1}^r (S^{n_i} + a_{n_i-1}^i S^{n_i-1} + \dots + a_0^i)$$

Maintenant, pour mettre le système sous cette forme (en r sous-systèmes mono-entrée et commandables), il suffit de trouver une matrice de passage régulière M tel que $x = M\tilde{x}$.

Détermination de la matrice de passage M

Soit un système de dimension n :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

On pose $x = M\tilde{x}$ avec M est une matrice régulière, alors, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned}$$

où: $\tilde{A} = M^{-1}AM$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$

On a : $\tilde{A} = M^{-1}AM \Rightarrow \tilde{A}M^{-1} = M^{-1}A$

M est une matrice carrée inversible de dimension $n \times n$ composée de r blocs $(M_1, M_2 \dots M_r)$ et chaque bloc M_i ($i = 1 \dots r$) contient n_i lignes (idem pour M^{-1})

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0^1 & -a_1^1 & \dots & -a_{n_1-1}^1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_1^{-1}(n_1) \\ M_2^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_2^{-1}(n_2) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(n_r) \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \\ n_1 \\ \updownarrow \\ n_2 \\ \updownarrow \\ n_r \end{matrix} \\
 & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_0^2 & -a_1^2 & \dots & -a_{n_2-1}^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0^2 & -a_1^2 & \dots & -a_{n_2-1}^2 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_0^r & -a_1^r & \dots & -a_{n_r-1}^r \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_0^r & -a_1^r & \dots & -a_{n_r-1}^r \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0^r & -a_1^r & \dots & -a_{n_r-1}^r \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} M_1^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_1^{-1}(n_1) \\ M_2^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_2^{-1}(n_2) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(n_r) \end{bmatrix} A
 \end{aligned}$$

- Détermination des lignes du 1^{er} bloc de M^{-1} , c-à-d $M_1^{-1}(i)$ pour : $i = 2 \dots n_1$

$$\begin{aligned}
 M_1^{-1}(2) &= M_1^{-1}(1)A \\
 M_1^{-1}(3) &= M_1^{-1}(2)A = M_1^{-1}(1)A^2 \\
 &\vdots \\
 M_1^{-1}(n_1) &= M_1^{-1}(n_1 - 1)A = M_1^{-1}(1)A^{n_1-1}
 \end{aligned}$$

- Détermination des lignes du 2^{ème} bloc de M^{-1} , c-à-d $M_2^{-1}(i)$ pour : $i = 2 \dots n_2$

$$\begin{aligned}
 M_2^{-1}(2) &= M_2^{-1}(1)A \\
 M_2^{-1}(3) &= M_2^{-1}(2)A = M_2^{-1}(1)A^2 \\
 &\vdots \\
 M_2^{-1}(n_2) &= M_2^{-1}(n_2 - 1)A = M_2^{-1}(1)A^{n_2-1}
 \end{aligned}$$

- Détermination des lignes du r ^{ème} bloc de M^{-1} , c-à-d $M_r^{-1}(i)$ pour : $i = 2 \dots n_r$

$$\begin{aligned}
 M_r^{-1}(2) &= M_r^{-1}(1)A \\
 M_r^{-1}(3) &= M_r^{-1}(2)A = M_r^{-1}(1)A^2 \\
 &\vdots \\
 M_r^{-1}(n_r) &= M_r^{-1}(n_r - 1)A = M_r^{-1}(1)A^{n_r-1}
 \end{aligned}$$

D'une façon générale, les lignes du i ^{ème} bloc de M^{-1} pour $i = 2 \dots n_i$

$$\begin{aligned}
 M_i^{-1}(2) &= M_i^{-1}(1)A \\
 M_i^{-1}(3) &= M_i^{-1}(2)A = M_i^{-1}(1)A^2 \\
 &\vdots \\
 M_i^{-1}(n_i) &= M_i^{-1}(n_i - 1)A = M_i^{-1}(1)A^{n_i-1}
 \end{aligned}$$

- Détermination de la 1^{ière} ligne de chaque bloc de M^{-1} , c-à-d $M_i^{-1}(1)$ pour : $i = 1 \dots n_r$

On a: $\tilde{B} = M^{-1}B$

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{r} \quad \quad \quad \xrightarrow{m-r} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} B_1^* \\ \\ B_2^* \\ \\ B_r^* \end{array} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} M_1^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_1^{-1}(n_1) \\ M_2^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_2^{-1}(n_2) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(n_r) \end{array} \right] [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_r \quad \dots \quad b_m] \end{array}
 \end{array}$$

En développant

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{r} \quad \quad \quad \xrightarrow{m-r} \quad \quad \quad \xleftarrow{r} \quad \quad \quad \xrightarrow{m-r} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} B_1^* \\ \\ B_2^* \\ \\ B_r^* \end{array} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} M_1^{-1}(1)b_1 & M_1^{-1}(1)b_2 & \dots & M_1^{-1}(1)b_r & \dots & M_1^{-1}(1)b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_1^{-1}(n_1)b_1 & M_1^{-1}(n_1)b_2 & \dots & M_1^{-1}(n_1)b_r & \dots & M_1^{-1}(n_1)b_m \\ M_2^{-1}(1)b_1 & M_2^{-1}(1)b_2 & \dots & M_2^{-1}(1)b_r & \dots & M_2^{-1}(1)b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_2^{-1}(n_2)b_1 & M_2^{-1}(n_2)b_2 & \dots & M_2^{-1}(n_2)b_r & \dots & M_2^{-1}(n_2)b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_r^{-1}(1)b_1 & M_r^{-1}(1)b_2 & \dots & M_r^{-1}(1)b_r & \dots & M_r^{-1}(1)b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_r^{-1}(n_r)b_1 & M_r^{-1}(n_r)b_2 & \dots & M_r^{-1}(n_r)b_r & \dots & M_r^{-1}(n_r)b_m \end{array} \right] \end{array}
 \end{array}$$

Par identification des blocs, on peut écrire :

$$\begin{aligned} M_1^{-1}(1)b_1 &= 0 \\ M_1^{-1}(2)b_1 &= M_1^{-1}(1)Ab_1 = 0 \\ &\vdots \\ M_1^{-1}(n_1)b_1 &= 1 = M_1^{-1}(1)A^{n_1-1}b_1 \\ \\ M_2^{-1}(1)b_2 &= 0 \\ M_2^{-1}(2)b_2 &= M_2^{-1}(1)Ab_2 = 0 \\ &\vdots \\ M_2^{-1}(n_2)b_2 &= 1 = M_2^{-1}(1)A^{n_2-1}b_2 \\ \\ M_r^{-1}(1)b_r &= 0 \\ M_r^{-1}(2)b_r &= M_r^{-1}(1)Ab_r = 0 \\ &\vdots \\ M_r^{-1}(n_r)b_r &= 1 = M_r^{-1}(1)A^{n_r-1}b_r \end{aligned}$$

Sous forme compacte :

$$\begin{aligned} M_1^{-1}(1)[b_1 \quad Ab_1 \quad \dots \quad A^{n_1-1}b_1] &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \\ M_2^{-1}(1)[b_2 \quad Ab_2 \quad \dots \quad A^{n_2-1}b_2] &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \\ &\vdots \\ M_r^{-1}(1)[b_r \quad Ab_r \quad \dots \quad A^{n_r-1}b_r] &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} M_1^{-1}(1) \\ M_2^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & \dots & A^{n_1-1}b_1 & b_2 & Ab_2 & \dots & A^{n_2-1}b_2 & \dots & b_r & Ab_r & \dots & A^{n_r-1}b_r \end{bmatrix}}_{Q_c} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} M_1^{-1}(1) \\ M_2^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} Q_c^{-1}$$

On pose :

$$Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{n_1} \\ \vdots \\ q_{n_1+n_2} \\ \vdots \\ q_{n_1+n_2+\dots+n_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{n_1} \\ \vdots \\ q_{n_1+n_2} \\ \vdots \\ q_{n_1+n_2+\dots+n_r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1^{-1}(1) \\ M_2^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{n_1} \\ \vdots \\ q_{n_1+n_2} \\ \vdots \\ q_{n_1+n_2+\dots+n_r} \end{bmatrix}$$

d'où :

$$M_i^{-1}(1) = q_{\sigma_i}$$

avec :

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^i n_j$$

3.4.1.1 Résumé : Décomposition d'un système MIMO en $r < m$ sous-systèmes mono-entrée commandables

Soit un système MIMO d'ordre n :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

1. Calculer les indices de commandabilité $n_1, n_2, \dots, n_r$ en utilisant le choix par colonnes.
2. Déterminer la matrice de commandabilité :

$$Q_C = [b_1 \quad Ab_1 \quad \dots \quad A^{n_1-1}b_1 \mid b_2 \quad Ab_2 \quad \dots \quad A^{n_2-1}b_2 \mid \dots \mid b_r \quad Ab_r \quad \dots \quad A^{n_r-1}b_r]$$

3. Calculer Q_C^{-1}

$$Q_C^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \text{ avec } q_i \text{ la } i^{\text{ème}} \text{ ligne de } Q_C^{-1}$$

4. Pour $i = 1 \dots r$, on définit :

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^i n_j$$

5. Calculer M^{-1}

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} q_{\sigma_1} \\ q_{\sigma_1}A \\ \vdots \\ q_{\sigma_1}A^{n_1-1} \\ \hline q_{\sigma_2} \\ q_{\sigma_2}A \\ \vdots \\ q_{\sigma_2}A^{n_2-1} \\ \hline \vdots \\ \hline q_{\sigma_r} \\ q_{\sigma_r}A \\ \vdots \\ q_{\sigma_r}A^{n_r-1} \end{bmatrix}$$

6. Calculer M et déterminer : $\tilde{A} = M^{-1}A M$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$ où :
 $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$
 $y = \tilde{C}\tilde{x}$

Exemple 3.7 Soit le système :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Décomposer le système en r sous systèmes mono-entrée commandables.

3.4.2 Décomposition du système en m sous systèmes mono-entrée commandables

Soit le système multivariable d'ordre n :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

On veut décomposer ce système en m sous systèmes mono-entrée commandables où $m = \text{rang}(B)$.

Il est possible de trouver une matrice de passage M tel que $x = M\tilde{x}$, donc :

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$

$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

avec : $\tilde{A} = M^{-1}A M$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$.

où :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0^1 & -a_1^1 & \dots & -a_{n_1-1}^1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0^2 & -a_1^2 & \dots & -a_{n_2-1}^2 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0^m & -a_1^m & \dots & -a_{n_m-1}^m \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Détermination de la matrice de passage M

Pour obtenir cette matrice on applique le même algorithme de la décomposition en r sous-systèmes, le seul changement est dans la construction de la matrice de commandabilité qui se fait cette fois-ci en suivant *le choix par lignes*.

3.4.2.1 Résumé : Décomposition d'un système multivariable en m sous-systèmes mono-entrée commandables

Soit un système mutivariable d'ordre n :

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu$$

$$y(t) = Cx$$

1. Calculer les indices de commandabilité $n_1, n_2, \dots, n_m$ en utilisant le choix par ligne.
2. Déterminer la matrice de commandabilité :

$$Q_c = [b_1 \quad Ab_1 \quad \dots \quad A^{n_1-1}b_1 \mid b_2 \quad Ab_2 \quad \dots \quad A^{n_2-1}b_2 \mid \dots \mid b_m \quad Ab_m \quad \dots \quad A^{n_m-1}b_m]$$

3. Calculer Q_c^{-1}

$$Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \text{ avec } q_i \text{ la } i^{\text{ième}} \text{ ligne de } Q_c^{-1}$$

4. Pour $i = 1 \dots m$, on définit :

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^i n_j$$

5. Calculer M^{-1}

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} q_{\sigma_1} \\ q_{\sigma_1}A \\ \vdots \\ q_{\sigma_1}A^{n_1-1} \\ \hline q_{\sigma_2} \\ q_{\sigma_2}A \\ \vdots \\ q_{\sigma_2}A^{n_2-1} \\ \hline \vdots \\ \hline q_{\sigma_m} \\ q_{\sigma_m}A \\ \vdots \\ q_{\sigma_m}A^{n_m-1} \end{bmatrix}$$

6. Calculer M et déterminer : $\tilde{A} = M^{-1}A M$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$ où :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned}$$

Exemple 3.8 : Décomposer le système de l'exemple précédent en $m = 2$ sous système mono-entrée commandables.

3.4.3 Décomposition du système p sous systèmes mono-sortie observables

Si la décomposition en sous-systèmes commandables est conçue dans une optique de commande, cette nouvelle décomposition est destinée à faciliter le problème de la construction du vecteur d'état et sera à la base de la réalisation des observateurs d'état.

Pour obtenir cette décomposition, on fait appel au principe de dualité :

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{S(A, B, C)}_{\text{systeme initial}} \xrightarrow{\text{Dual}} S^*(A^* = A^T, B^* = C^T, C^* = B^T) \xrightarrow[\substack{\text{Décomposition en "p" sous systemes commandables} \\ (\text{calcul de } M^{*-1} \text{ et } M^*)}]{\text{Dual}} \tilde{S}^*(\tilde{A}^*, \tilde{B}^*, \tilde{C}^*) \\
 \xrightarrow{\text{Dual}} \tilde{S} \left(\tilde{A} = \tilde{A}^{*T}, \tilde{B} = \tilde{C}^{*T}, \tilde{C} = \tilde{B}^{*T} \right) \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{Système décomposé en} \\ \text{"p" sous systemes observables}}}
 \end{array}$$

4. Exercices

Exercice 01 : Soient deux systèmes monovariabiles:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 2 \end{bmatrix} u(t), y = [1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- 1- Etudier la commandabilité et l'observabilité des deux systèmes.

Soit un système monovariable :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, y = [1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- 2- Pour quelle valeur de α le système soit non commandable.
- 3- Le système est-il observable pour cette valeur de α .

Exercice 02 : Soit un système monovariable :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- 1- Etudier la commandabilité et l'observabilité du système.
- 2- Mettre le système sous la forme compagne de commandabilité (s'il est commandable).
- 3- Mettre le système sous forme compagne d'observabilité (s'il est observable).

Exercice 03: Considérons un système multivariable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Etudier la commandabilité et l'observabilité du système en utilisant les deux méthodes (choix par lignes et choix par colonnes).

Exercice 04:

Considérons un système multivariable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- 1- Décomposer le système en r (avec $r < m$) sous-systèmes mono-entrée commandables.
- 2- Décomposer le système en m sous-systèmes mono-entrée commandables.

Exercice 05:

Considérons un système multivariable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

- 1- Décomposer le système en r (avec $r < m$) sous-systèmes mono-entrée commandables.
- 2- Décomposer le système en m sous-systèmes mono-entrée commandables.
- 3- Décomposer le système en p sous-système mono-sortie observables.