

Chapitre 4

Représentation des systèmes multivariables par matrice de transfert

1. Introduction

Dans le cas systèmes monovariables, la fonction reliant l'entrée à la sortie est appelée *fonction de transfert*. Dans le cas des systèmes multivariables, nous avons plusieurs fonctions de transfert représentant l'effet de chaque entrée sur chaque sortie. L'ensemble de ces fonctions rangées en tableau constitue la *matrice de transfert*. Dans ce chapitre, nous montrons les relations de passage d'une représentation par fonction (matrice) de transfert vers une représentation d'état et vice versa.

2. Cas des systèmes monovariables

2.1 Passage de la Représentation d'état vers la fonction de transfert

Le passage de la représentation d'état vers la fonction de transfert n'offre aucune difficulté. Soit la représentation d'état :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\quad (4.1)$$

Posons les conditions initiales nulles ($x(t=0) = 0$) et prenons la transformée de Laplace (TL) des deux équations (4.1), on obtient :

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (4.2)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (4.3)$$

A partir de (4.2), on peut écrire :

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \quad (4.4)$$

A partir de (4.3) et (4.4):

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \quad (4.5)$$

La fonction de transfert est :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (4.6)$$

Exemple 4.1 : Montrer que la fonction de transfert du MCC est unique, c.-à-d. calculer la fonction de transfert en utilisant les deux représentations d'état du MCC (exemples 2.1 et 2.2 donnés dans le deuxième chapitre) :

Première représentation du MCC

On a : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$, $C = [1 \ 0]$, $D = 0$.

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 & s + a_1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\left(\text{adj} \begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 & s + a_1 \end{bmatrix} \right)^T}{\det \left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 & s + a_1 \end{bmatrix} \right)} = \frac{\left(\begin{bmatrix} s + a_1 & -a_0 \\ 1 & s \end{bmatrix} \right)^T}{(s(s + a_1) + a_0)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{[1 \ 0] \begin{bmatrix} s + a_1 & 1 \\ -a_0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}}{(s(s + a_1) + a_0)} = \frac{b_0}{(s^2 + a_1s + a_0)} = \frac{K}{JLs^2 + (fL + JR)s + Rf}$$

Deuxième représentation du MCC

On a : $A = \begin{bmatrix} -R/L & 0 \\ K/J & -f/J \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [0 \quad 1]$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & 0 \\ \frac{-K}{J} & s + \frac{f}{J} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\left(\text{adj} \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & 0 \\ \frac{-K}{J} & s + \frac{f}{J} \end{bmatrix} \right)^T}{\det \left(\begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & 0 \\ \frac{-K}{J} & s + \frac{f}{J} \end{bmatrix} \right)} = \frac{\left(\begin{bmatrix} s + \frac{f}{J} & \frac{K}{J} \\ 0 & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \right)^T}{\left(s + \frac{f}{J} \right) \left(s + \frac{R}{L} \right)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{[0 \quad 1] \begin{bmatrix} s + \frac{f}{J} & 0 \\ \frac{K}{J} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\left(s + \frac{f}{J} \right) \left(s + \frac{R}{L} \right)} = \frac{K}{JLs^2 + (fL + JR)s + Rf}$$

Remarque2.1: A partir de la relation de passage donnée par l'équation (4.6), on remarque que le dénominateur de la fonction de transfert n'est autre que le polynôme caractéristique $(sI - A)$ de la matrice A , donc les pôles du système sont les *valeurs propres* de la matrice A .

2.2 Passage de la fonction de transfert vers la représentation d'état

Comme il vient d'être mentionné, s'il existe une seule et unique fonction de transfert décrivant un système linéaire, il peut en revanche exister plusieurs représentations d'état dites *formes* ou *réalisations* du système. Dans cette partie, il est montré comment passer de la fonction de transfert à plusieurs formes (réalisations) d'état. On se place d'emblée dans le cas le plus fréquent d'un système continu, stationnaire, déterministe et causal.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (4.7)$$

où $N(s)$ est le numérateur de la fonction de transfert.

2.2.1 Forme parallèle

a) Cas des pôles distincts : Dans le cas où les pôles λ_i ($i = 1 \dots n$) sont distincts, il est facile de réaliser la décomposition en éléments simples de $G(s)$.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s + \lambda_i)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i}{s + \lambda_i} \right) \quad (4.8)$$

avec :

$$\alpha_i = \lim_{s \rightarrow -\lambda_i} (s + \lambda_i) G(s)$$

On pose $X_i(s) = \frac{\alpha_i}{s + \lambda_i} U(s)$ on aura :

$$sX_i(s) = \alpha_i U(s) - \lambda_i X_i(s) \quad (4.9)$$

A partir de (4.8), il vient

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i U(s)}{s + \lambda_i} \right) = X_1(s) + X_2(s) + \dots + X_n(s)$$

En utilisant la transformée inverse de Laplace (TL inverse), on obtient :

$$\dot{x}_i(t) = \alpha_i u(t) - \lambda_i x_i(t)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t)$$

Ce qui donne la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} u(t) \quad (4.10)$$

$$y(t) = [1 \ 1 \ \dots \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Une telle forme est dite *diagonale* car la matrice d'évolution A est diagonale.

Remarque 4.2 :

- Cette forme peut être modifiée en remplaçant le vecteur B par le vecteur C^T et le vecteur C par le vecteur B^T , ceci peut être obtenu en choisissant $X_i(s) = \frac{1}{s+\lambda_i} U(s)$ au lieu de $X_i(s) = \frac{\alpha_i}{s+\lambda_i} U(s)$ dans la relation (4.8).
- La matrice d'état A est diagonale, ses valeurs propres qui sont les pôles du système sont les éléments de la diagonale.

Cette forme est constituée de n blocs élémentaires disposés en parallèle.

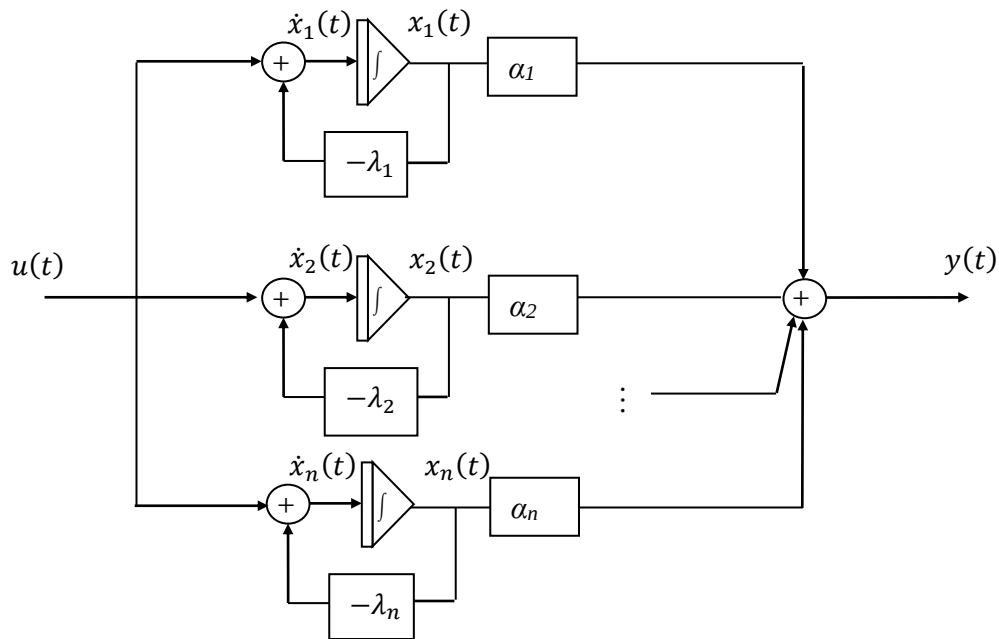


Fig.4.1 Forme parallèle de la représentation d'état.

Exemple 4.2 : Trouver la forme d'état parallèle du système défini par la fonction de transfert suivante :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Les pôles sont distincts : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$, on décompose la fonction de transfert en éléments simples :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{s+2}$$

$$\alpha_1 = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_2 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)G(s) = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_3 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)G(s) = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2}$$

d'où

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{U(s)}{2s} - \frac{U(s)}{2(s+1)} + \frac{U(s)}{2(s+2)}$$

On pose : $X_1(s) = \frac{U(s)}{2s}$, $X_2(s) = -\frac{U(s)}{2(s+1)}$, $X_3(s) = \frac{U(s)}{2(s+2)}$, alors, il vient :

$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s) + X_3(s) \Rightarrow y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

$$sX_1(s) = \frac{U(s)}{2} \Rightarrow \dot{x}_1(t) = \frac{1}{2}u(t)$$

$$sX_2(s) + X_2(s) = -\frac{U(s)}{2} \Rightarrow \dot{x}_2(t) = -x_2(t) - \frac{1}{2}u(t)$$

$$sX_3(s) + 2X_3(s) = \frac{U(s)}{2} \Rightarrow \dot{x}_3(t) = -2x_3(t) + \frac{1}{2}u(t)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Si on pose : $X_1(s) = \frac{U(s)}{s}$, $X_2(s) = \frac{U(s)}{(s+1)}$, $X_3(s) = \frac{U(s)}{(s+2)}$, on aura :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b) Cas des pôles multiples : Dans ce cas, on obtient la forme quasi diagonale dite *forme de Jordan*. Dans un premier temps, pour comprendre ce qui peut être envisagé dans cette situation, l'on peut tout simplement considérer une fonction de transfert $G(s)$ ne possédant qu'un seul pôle γ de multiplicité n . on a alors :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{(s + \gamma)^n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\beta_i}{(s + \gamma)^i} \right)$$

$$\text{avec : } \beta_i = \lim_{s \rightarrow -\gamma} \frac{1}{(n-i)!} \left[\frac{d^{n-i}}{ds^{n-i}} [(s + \gamma)^n G(s)] \right]$$

$$\text{On pose } X_{n+1-i}(s) = \frac{U(s)}{(s+\gamma)^i}, \text{ on aura : } Y(s) = \sum_{i=1}^n \beta_i \left(\frac{U(s)}{(s+\gamma)^i} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } i = 1: X_n(s) &= \frac{U(s)}{(s+\gamma)} & \text{Pour } i = 2: X_{n-1}(s) &= \frac{U(s)}{(s+\gamma)^2} = \frac{X_n(s)}{(s+\gamma)} \\ \text{Pour } i = 3: X_{n-2}(s) &= \frac{U(s)}{(s+\gamma)^3} = \frac{X_{n-1}(s)}{(s+\gamma)} \dots & \text{Pour } i = n: X_1(s) &= \frac{U(s)}{(s+\gamma)^n} = \frac{X_2(s)}{(s+\gamma)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \beta_1 \left(\frac{U(s)}{(s+\gamma)} \right) + \beta_2 \left(\frac{U(s)}{(s+\gamma)^2} \right) + \dots + \beta_n \left(\frac{U(s)}{(s+\gamma)^n} \right) \\ y(t) &= \beta_1 x_n(t) + \beta_2 x_{n-1}(t) + \dots + \beta_n x_1(t) \end{aligned}$$

D'une façon générale :

$$\text{pour } j = n : X_n(s) = \frac{U(s)}{(s+\lambda)} \Rightarrow \dot{x}_n(t) = -\gamma x_n(t) + u(t)$$

$$\text{pour } j = n - 1: X_j(s) = \frac{X_{j+1}(s)}{(s+\lambda)} \Rightarrow \dot{x}_j(t) = -\gamma x_j(t) + x_{j+1}(t)$$

Ce qui donne la forme quasi diagonale suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\gamma & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\gamma & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & -\gamma & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [\beta_n \ \beta_{n-1} \ \dots \ \beta_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Remarque 4.3 : Dans le cas où la fonction de transfert possède « p » pôles simples λ_i ($i = 1 \dots p$) et un pôle multiple γ de multiplicité « q », avec « $n = p+q$ », la décomposition en éléments simples donne :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} \dots + a_1s + a_0} = \sum_{i=1}^p \left(\frac{\alpha_i}{s + \lambda_i} \right) + \sum_{j=1}^q \beta_j \left(\frac{U(s)}{(s + \gamma)^j} \right)$$

avec :

$$\alpha_i = \lim_{s \rightarrow -\lambda_i} (s + \lambda_i) G(s)$$

$$\beta_j = \lim_{s \rightarrow -\gamma} \frac{1}{(q-j)!} \left[\frac{d^{q-j}}{ds^{q-j}} [(s + \gamma)^q G(s)] \right]$$

Exemple 4.3 : Trouver la forme quasi diagonale du système défini par : $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)^3}$

La fonction de transfert contient un pôle simple $\lambda_1 = -1$ et un pôle multiple de multiplicité trois $\gamma = -2$, donc, la décomposition en éléments simples de la fonction de transfert donne.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)^3} = \frac{\alpha_1}{(s+1)} + \frac{\beta_1}{(s+2)} + \frac{\beta_2}{(s+2)^2} + \frac{\beta_3}{(s+2)^3}$$

avec :

$$\alpha_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)G(s) = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{1}{(s+1)(s+2)^3} = 1$$

$$\beta_3 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)^3 G(s) = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)^3 \frac{1}{(s+1)(s+2)^3} = -1$$

$$\beta_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{d}{ds} [(s+2)^3 G(s)] \right] = \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{d}{ds} \left[(s+2)^3 \frac{1}{(s+1)(s+2)^3} \right] \right] = \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{(s+1)} \right] \right]$$

$$\beta_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{-1}{(s+1)^2} \right] = -1$$

$$\beta_1 = \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{d^2}{ds^2} [(s+2)^3 G(s)] \right] = \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{1}{(s+1)} \right] \right] = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[\frac{-1}{(s+1)^2} \right]$$

$$= \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{2(s+1)}{(s+1)^4} \right] = -2$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)^3} - \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)} \\ Y(s) &= \frac{U(s)}{(s+1)} - \frac{U(s)}{(s+2)^3} - \frac{U(s)}{(s+2)^2} - \frac{2U(s)}{(s+2)} \end{aligned}$$

On pose : $X_4(s) = \frac{U(s)}{(s+2)}$, $X_3(s) = \frac{U(s)}{(s+2)^2}$, $X_2(s) = \frac{U(s)}{(s+2)^3}$ et $X_1(s) = \frac{U(s)}{(s+1)}$, alors :

$$Y(s) = X_1(s) - X_2(s) - X_3(s) - 2X_4(s) \Rightarrow y(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) - 2x_4(t)$$

$$X_4(s) = \frac{U(s)}{(s+2)} \Rightarrow \dot{x}_4(t) = -2x_4(t) + u(t)$$

$$X_3(s) = \frac{U(s)}{(s+2)^2} = \frac{X_4(s)}{(s+2)} \Rightarrow \dot{x}_3(t) = -2x_3(t) + x_4(t)$$

$$X_2(s) = \frac{U(s)}{(s+2)^3} = \frac{X_3(s)}{(s+2)} \Rightarrow \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + x_3(t)$$

$$X_1(s) = \frac{U(s)}{(s+1)} \Rightarrow \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad -1 \quad -1 \quad -2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Forme série

Dans ce cas la fonction de transfert peut être écrite sous forme de produit d'éléments élémentaires.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{\prod_{i=1}^n (s + \lambda_i)} = k \frac{1}{(s + \lambda_1)} \frac{1}{(s + \lambda_2)} \cdots \frac{1}{(s + \lambda_n)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = k \frac{U(s)}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \cdots (s + \lambda_n)}$$

On pose :

$$X_1(s) = \frac{U(s)}{(s + \lambda_1)}, X_2(s) = \frac{X_1(s)}{(s + \lambda_2)}, \dots, X_n(s) = \frac{X_{n-1}(s)}{(s + \lambda_n)}, \text{ on a alors :}$$

$$Y(s) = kX_n(s) \Rightarrow b \ y(t) = K x_n(t)$$

$$X_1(s) = \frac{U(s)}{(s + \lambda_1)} \Rightarrow \dot{x}_1(t) = u(t) - \lambda_1 x_1(t)$$

$$X_2(s) = \frac{X_1(s)}{(s + \lambda_2)} \Rightarrow \dot{x}_2(t) = x_1(t) - \lambda_2 x_2(t)$$

$$X_n(s) = \frac{X_{n-1}(s)}{(s + \lambda_n)} \Rightarrow \dot{x}_n(t) = x_{n-1}(t) - \lambda_n x_n(t)$$

Ceci conduit à la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -\lambda_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ k] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Cette forme est une cascade de n blocs élémentaires.

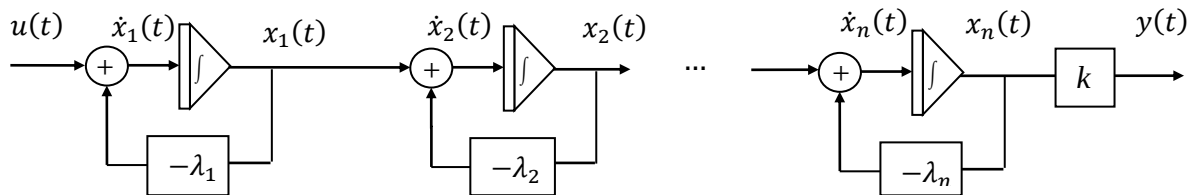


Fig.4.2 Forme série de la représentation d'état.

3. Cas des systèmes multivariables

3.1 Passage de la Représentation d'état vers la matrice de transfert

Soit la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux équations, il vient:

$$\begin{aligned} sX(s) - X(0) &= AX(s) + Bu(s) \\ Y(s) &= CX(s) \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{T(s)} \begin{bmatrix} X(s) \\ -U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) \\ -Y(s) \end{bmatrix}$$

où :

$T(s)$: est appelée matrice polynomiale du système.

Dans le cas SISO, la fonction de transfert est : $F(s) = C(sI - A)^{-1}B$

Dans le cas MIMO, la matrice de transfert est : $M_{(p \times m)}(s) = C(sI - A)^{-1}B$

On note $m_{ij}(s)$ l'élément qui relie la sortie i à l'entrée j de la matrice de transfert.

$$M(s) = \begin{bmatrix} m_{11}(s) & \dots & m_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ m_{p1}(s) & \dots & m_{pm}(s) \end{bmatrix}, B = [B_1 \quad \dots \quad B_m], C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

alors :

$$\begin{aligned} m_{ij}(s) &= C_i(sI - A)^{-1}B_j \\ &= (T_{1,2,\dots,n,n+i}^{1,2,\dots,n,n+j}) / \det(sI - A) \end{aligned}$$

représente le mineur formé par les éléments des lignes $1, 2 \dots n, n + i$ et des colonnes $1, 2 \dots n, n + j$ de la matrice $T(s)$.

Exemple 4.4 : Calculer la matrice de transfert du système défini par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Remarque 4.4 : Il existe une deuxième méthode de passage (algorithme de Leverrier).

3.2 Passage de la matrice de transfert vers la représentation d'état

3.2.1 Réalisation minimale

3.2.1.1 Méthode de Gilbert

a) Cas des pôles simples : Dans le cas où tous les pôles de la matrice de transfert sont simples et réels, Gilbert a proposé une méthode permettant de trouver facilement une réalisation complètement commandable et observable (réalisation minimale). On note que cette réalisation est diagonale.

Etant donné la matrice rationnelle $M(s)$ dont les éléments ont un nombre fini de pôles simples.

$$\lambda_i \text{ où } i = 1 \dots n$$

On décompose $M(s)$ en éléments simples :

$$M(s) = \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{s - \lambda_i}; \quad M_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) M(s)$$

Si le rang n_i du pôle λ_i est défini comme étant le rang de M_i , c-à-d $n_i = \text{rang}(M_i)$, donc il faut choisir n_i lignes linéairement indépendants factorisant M_i alors $M(s)$ admet une représentation minimale d'ordre n .

$$n = \sum n_i \text{ tel que : } A = \text{bloc diag}(\lambda_i I_{n_i}), M_i = C_i B_i$$

Exemple 4.5

$$M(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s^2 + 6 & s^2 + s + 4 \\ 2s^2 - 7s - 2 & s^2 - 5s - 2 \end{bmatrix}$$

Déterminer la forme d'état de cette matrice.

b) Cas des pôles multiples

Lorsque $M(s)$ possède des pôles multiples $D(s) = \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i)^{n_i}$, dans ce cas :

$$M(s) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{M_i}{(s - \lambda_i)^{n_i-j}}$$

La méthode précédente s'applique, mais conduit en général à une réalisation non minimale.

3.2.2 Réalisation sous forme canonique de commandabilité

Etape 1 : Déterminer le dénominateur commun de chaque colonne $D_1(s), D_2(s), \dots, D_m(s)$ et écrire $M(s)$ sous la forme :

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{N_{11}(s)}{D_1(s)} & \dots & \frac{N_{1m}(s)}{D_m(s)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N_{p1}(s)}{D_1(s)} & \dots & \frac{N_{pm}(s)}{D_m(s)} \end{bmatrix} = N(s)D^{-1}(s)$$

où

$$\begin{bmatrix} N_{11}(s) & \dots & N_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{p1}(s) & \dots & N_{pm}(s) \end{bmatrix} \text{ et } D(s) = \text{diag}[D_1(s) \quad \dots \quad D_m(s)]$$

Etape 2 : $D_i(s) = s^{n_i} + a_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + \dots + a_1^i s + a_0^i \quad i = 1 \dots m$

n_i est l'indice de commandabilité de u_i

$$D_i(s) = s^{n_i} + [a_0^i \ a_1^i \ \dots \ a_{n_i-1}^i] \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ \underbrace{s^{n_i-1}}_{S_i} \end{bmatrix}$$

Etape 3 :

$$N(s) = C s \text{ où } s = \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_m \end{bmatrix}$$

Etape 4 :

$$A = \text{diag}[A_1(s) \quad \dots \quad A_m(s)] \text{ avec } A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & 1 \\ -a_0^i & -a_1^i & & \dots & -a_{n_i-1}^i \end{bmatrix}$$

$$B = \text{diag}[b_1 \quad \dots \quad b_m] \text{ avec } b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 4.6: Soit la matrice de transfert :

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Trouver une réalisation sous forme canonique de commandabilité.

3.2.3 Réalisation sous forme canonique d'observabilité

Etape 1 : Déterminer le dénominateur commun de chaque ligne $D_1(s), D_2(s), \dots, D_m(s)$ et écrire $M(s)$ sous la forme :

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{N_{11}(s)}{D_1(s)} & \dots & \frac{N_{1m}(s)}{D_1(s)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N_{p1}(s)}{D_m(s)} & \dots & \frac{N_{pm}(s)}{D_p(s)} \end{bmatrix} = D^{-1}(s)N(s)$$

où

$$\begin{bmatrix} N_{11}(s) & \dots & N_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{p1}(s) & \dots & N_{pm}(s) \end{bmatrix} \text{ et } D(s) = \text{diag}[D_1(s) \quad \dots \quad D_p(s)]$$

Etape 2 : $D_i(s) = s^{\tau_i} + a_{\tau_i-1}^i s^{\tau_i-1} + \dots + a_1^i s + a_0^i \quad i = 1 \dots p$
 τ_i est l'indice d'observabilité de y_i

$$D_i(s) = s^{\tau_i} + [a_0^i \ a_1^i \ \dots \ a_{\tau_i-1}^i] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{\tau_i-1} \end{bmatrix}}_{s_i}$$

Etape 3 :

$$N(s) = sB$$

$$s = \text{diag}[s_1^T \quad \dots \quad s_p^T] = \begin{bmatrix} s_1^T & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_p^T \end{bmatrix}$$

Etape 4 :

$$A = \text{diag}[A_1(s) \quad \dots \quad A_m(s)] \text{ avec } A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0^i \\ 1 & 0 & 0 & & -a_1^i \\ 0 & 1 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{\tau_i-1}^i \end{bmatrix}$$

$$C = \text{diag}[c_1 \quad \dots \quad c_p] \text{ avec } c_i = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$

Exemple 4.7 Soit la matrice de transfert :

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Trouver une réalisation sous forme canonique d'observabilité.

4. Exercices

Exercice 01

Calculer la fonction de transfert des trois systèmes monovariabiles définis par :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0]x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]x$$

Exercice 02

Trouver une représentation d'état pour chacun des trois systèmes monovariabiles définis :

$$H_1(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{(s+3)(s+4)(s+5)}, \quad H_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^3}, \quad H_3(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Exercice 03

Calculer la matrice de transfert du système multivariable défini par :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Exercice 04

Déterminer la forme d'état de cette matrice de transfert :

$$M(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s^2 + 6 & s^2 + s + 4 \\ 2s^2 - 7s - 2 & s^2 - 5s - 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 05

Soit un système multivariable défini par la matrice de transfert suivante:

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

- 1- Déterminer la réalisation sous forme canonique de commandabilité.
- 2- Déterminer la réalisation sous forme canonique d'observabilité.