

## Chapitre 5

### Commande par retour d'état des systèmes multivariables

#### 1. Introduction

Le placement de pôles est la méthode générale utilisée pour la correction des systèmes linéaires. Son principe consiste à déterminer une loi de commande (un régulateur) par retour d'état de façon à ce que le système en boucle fermée ait des pôles spécifiés par l'opérateur, cette approche assure la stabilité du système bouclé d'une manière naturelle et permet également d'obtenir le comportement dynamique désiré par un choix approprié des modes (pôles) du système en boucle fermée.

#### 2. Cas particulier : Systèmes monovariabiles

Etant donné un système en boucle ouverte défini par :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

Le système est supposé commandable.

Le principe de la méthode consiste à utiliser une loi de commande par retour d'état de la forme :

$$u(t) = g y_c(t) - K x(t)\tag{5.2}$$

$y_c(t)$  : est la consigne (sortie désirée).

$g$  : est un scalire de préreglage.

$K = [k_0 \ k_1 \ \dots \ k_{n-1}]$  est un vecteur ligne de  $n$  composantes appelé vecteur des gains du retour d'état  
 $x \in R^n$  vecteur d'état (vecteur colonne).

La fonction de transfert en boucle ouverte du système est :

$$G_{BO}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B\tag{5.3}$$

L'équation caractéristique du système en boucle ouverte est :

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0\tag{5.4}$$

Les pôles en boucle ouverte sont les valeurs propres de  $A$  obtenues à partir de l'équation (5.4).

En remplaçant la loi de commande dans l'équation d'état (5.1), on obtient la représentation d'état en boucle ouverte :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B(g y_c - K x(t)) \\ \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + Bg y_c\end{aligned}\tag{5.5}$$

La fonction de transfert en boucle fermée du système est :

$$\begin{aligned}G_{BF}(s) &= \frac{Y(s)}{Y_c(s)} \\ &= C(sI - (A - BK))^{-1}Bg\end{aligned}\tag{5.6}$$

L'équation caractéristique du système en boucle fermée est :

$$\det(sI - (A + BK)) = s^n + \beta_{n-1}(K) s^{n-1} + \dots + \beta_1(K)s + \beta_0(K) = 0 \quad (5.7)$$

Les pôles en boucle fermée sont les valeurs propres de  $(A - BK)$  obtenues à partir de l'équation (5.7).

### Remarque 5.1

Les coefficients de l'équation caractéristique du système en BF sont fonction de  $K$ , d'où un choix approprié du vecteur  $K$  permet d'imposer les pôles du système en BF, donc il nous permet d'améliorer la stabilité et les performances dynamiques (rapidité et amortissement) du système. Le but est donc de réaliser un asservissement modifiant convenablement la matrice d'état du système.

Dynamique en BO :  $A \xrightarrow{\text{application de la commande par retour d'état}} \text{Dynamique en BF: } (A - BK)$

Alors, le problème de la commande par retour d'état consiste à trouver  $K$  qui stabilise le système en BF.

### 2.1 Calcul de la commande

Le système (5.1) étant commandable à partir de la seule entrée, donc, qu'il existe  $M$  tel que :  $x = M\tilde{x}$  ( $M$  inversible) qui permet de mettre le système sous forme canonique compagne de commandabilité.

$$\dot{\tilde{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}=M^{-1}A M} \tilde{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}=M^{-1}B} u(t)$$

Le polynôme caractéristique du système en boucle ouverte :

$$D_{BO}(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

En appliquant la commande par retour d'état :

$$u(t) = g y_c(t) - K x(t) \quad (5.8)$$

avec :  $K = [k_0 \ k_1 \ \dots \ k_{n-1}]$ .

Dans la base canonique compagne de commandabilité, la commande devient :

$$x = M\tilde{x} \Rightarrow u(t) = g y_c(t) - \underbrace{K M}_{\tilde{K}} \tilde{x}(t)$$

$$u(t) = g y_c(t) - \tilde{K} \tilde{x}(t) \quad (5.9)$$

avec  $\tilde{K} = K M = [\tilde{k}_0 \ \tilde{k}_1 \ \dots \ \tilde{k}_{n-1}]$

Considérons le système dans la base canonique compagne de commandabilité :

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

En remplaçant la commande obtenue dans la base canonique compagne de commandabilité, on obtient la représentation d'état en boucle fermée (pour la clarté des expressions, on omet la variable  $t$ ):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (g y_c - \tilde{K} \tilde{x}) \\ \tilde{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_0 + \tilde{k}_0) & -(a_1 + \tilde{k}_1) & -(a_2 + \tilde{k}_2) & \dots & -(a_{n-1} + \tilde{k}_{n-1}) \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g y_c \quad (5.10) \end{aligned}$$

Le système en boucle fermée est sous forme compagne de comandabilité, donc, le polynôme caractéristique en boucle fermée est :

$$D_{BF}(s) = s^n + (a_{n-1} + \tilde{k}_{n-1}) s^{n-1} + \dots + (a_1 + \tilde{k}_1) s + (a_0 + \tilde{k}_0) \quad (5.11)$$

En imposant «  $n$  » pôles en boucle fermée :  $p_1 \dots p_n$ .

Le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée s'écrit :

$$\begin{aligned} D_{BF}^d(s) &= (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) \\ D_{BF}^d(s) &= s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

En identifiant (5.11) et (5.12) terme à terme, il vient :

$$\begin{cases} \alpha_0 = a_0 + \tilde{k}_0 \\ \alpha_1 = a_1 + \tilde{k}_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} = a_{n-1} + \tilde{k}_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{k}_0 = \alpha_0 - a_0 \\ \tilde{k}_1 = \alpha_1 - a_1 \\ \vdots \\ \tilde{k}_{n-1} = \alpha_{n-1} - a_{n-1} \end{cases}$$

D'une manière générale :  $\tilde{k}_i = \alpha_i - a_i$  avec :  $i = 0 \dots n - 1$

où :

$a_i$  sont les coefficients du polynôme caractéristique en boucle ouverte.

$\alpha_i$  sont les coefficients du polynôme caractéristique désirée en boucle fermée.

Finalement, on revient à la base initiale :  $K = \tilde{K} M^{-1}$

### 2.1.1 Résumé : Algorithme de placement de pôles –retour d'état

Soit un système à commander :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

L'on dispose d'un spectre désiré (n pôles désirés en BF)

La commande par retour d'état à appliquer au système est :  $u(t) = g y_c(t) - K x(t)$

**Etape 1 :** Vérification de la commandabilité du système : calcul du  $\det(Q_c)$

**Etape 2 :** Mettre le système sous forme compagne commandable :  $x = M\tilde{x}$  (calcul de  $M$  et  $M^{-1}$ )

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}\end{aligned}$$

Avec :  $\tilde{A} = M^{-1}A M$ ,  $\tilde{B} = M^{-1}B$ ,  $\tilde{C} = CM$

**Etape 3 :** Détermination du polynôme caractéristique en BO :

$$D_{BO}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

**Etape 4 :** Détermination du polynôme caractéristique désiré en BF :

$$D_{BF}^d(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$$

**Etape 5 :** Calcul du retour d'état  $\tilde{K} = [\tilde{k}_0 \ \tilde{k}_1 \ \dots \ \tilde{k}_{n-1}]$  dans la base canonique de commandabilité.

$$\tilde{k}_i = \alpha_i - a_i \quad \text{avec: } i = 0 \dots n-1$$

**Etape 6 :** Calcul de retour d'état  $K = [k_0 \ k_1 \ \dots \ k_{n-1}]$  dans la base initiale :

$$K = \tilde{K}M^{-1}$$

**Exemple 5.1** Soit un système donné :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y(t) &= [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Concevoir un retour d'état de sorte que le système corrigé (c à d en boucle fermée) ait le pôle double  $-1$ .

## 2.1 Performances statique et retour d'état- le préréglage

Dans le cas où le système ne subit aucune perturbation extérieure, l'objectif de la commande est d'amener le système (et notamment sa sortie) à un nouveau point d'équilibre. Le placement de pôles permet de satisfaire les contraintes dynamiques imposées au système (rapidité et stabilité). Les contraintes statiques (erreur statique) doivent être traitées séparément. L'on se contente ici de déterminer une loi de commande telle que le gain statique du modèle en boucle fermée est unitaire (sortie=consigne, donc erreur statique nulle). Pour obtenir ce gain statique, l'on utilise le dernier degré de liberté disponible, à savoir le scalaire de préréglage  $g$ .

La fonction de transfert d'un système bouclé par retour d'état est : (voir équation 6)

$$G_{BF}(s) = \frac{Y(s)}{Y_c(s)} = C(sI - (A - BK))^{-1}B g$$

Ainsi le gain statique d'une telle fonction de transfert est :

$$G_{BF}(0) = \frac{Y(0)}{Y_c(0)} = -C(A - BK)^{-1}B g$$

Ce qui signifie que si l'on souhaite obtenir  $G_{BF}(0) = 1$ , il suffit de calculer  $g$  ainsi :

$$-C(A - BK)^{-1}B g = 1$$

Pour avoir une erreur statique (de position) nulle, il faut choisir  $g$  tel que :

$$g = [-C(A - BK)^{-1}B]^{-1}$$

## 2.2 Rejet de perturbations et retour d'état (adjonction d'intégrateurs)

Indépendamment du gain statique, il peut être souhaitable de réduire l'effet d'une perturbation exogène agissant, en tant qu'entrée non contrôlée, sur le système. Il est parfois très difficile de réduire l'effet de la perturbation et les quelques techniques existantes nécessitent souvent la connaissance d'un modèle de la perturbation. L'on peut noter que toute perturbation de type impulsion de Dirac est rejetée *en régime permanent* dès lors que le système est asymptotiquement stable.

Si la perturbation est plus franche, il faut envisager de sophistication la loi de commande et ceci peut s'avérer délicat. Toutefois, lorsque cette perturbation peut être assimilée à un *échelon*, alors, il est possible d'ajouter un intégrateur dans la chaîne directe. Il est bien connu qu'un système de classe 1

(c'est-à-dire comportant un intégrateur dans la chaîne directe) est précis en position c'est-à-dire que l'erreur de position de ce système, une fois bouclé, est nulle quand on lui applique un échelon en consigne. Enfin, en présence d'une perturbation elle aussi en échelon, cet intégrateur n'a l'effet escompté que s'il est placé en amont du point d'entrée de la perturbation dans la chaîne directe. Sur la base de ces constatations, l'on peut choisir d'ajouter un intégrateur à l'entrée d'un système avant de réaliser un retour d'état.

Cependant, dès lors qu'un intégrateur est ajouté, le modèle en boucle ouverte change. Il devient d'ordre  $n + 1$ , c'est-à-dire que le vecteur d'état  $X$  de dimension  $n$  est augmenté d'une  $(n + 1)^{\text{ème}}$  composante.

La FTBO du nouveau système devient :

$$\bar{H}(s) = \frac{1}{s} H(s), \text{ où } H(s) \text{ est la FTBO du système initial.}$$

Il convient donc, de calculer une loi de commande de type retour d'état utilisant les  $n + 1$  composantes de nouveau vecteur d'état. L'entrée du système devient  $\bar{U}(s)$  telle que :  $U(s) = \frac{1}{s} \bar{U}(s)$

**Remarque 5.2:** Ce problème ne sera pas abordé en détails dans ce cours.

### 3. Cas général : Systèmes multivariables

Soit le système multivariable de dimension  $n$  :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

avec :  $A(n \times n), B(n \times m), C(p \times n)$

La loi de commande par retour d'état est :

$$u = g y_c - K x \quad (5.13)$$

$y_c$  : Vecteur regroupant les consignes (sorties désirées) de dimension  $(p \times 1)$

$g$  : est une matrice de préreglage de dimension  $(m \times p)$ .

$K$  est une matrice de dimension  $(m \times n)$  appelé matrice des gains du retour d'état.

#### 3.1 Système complètement commandable par $r$ ( $r < m$ ) entrées

On décompose le système en  $r$  sous-systèmes commandables chacun par une seule entrée, alors, on pose  $x = M\tilde{x}$ , il vient :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}\end{aligned} \quad (5.14)$$

où  $\tilde{A} = M^{-1}A M, \tilde{B} = M^{-1}B, \tilde{C} = CM, u = g y_c - \tilde{K}\tilde{x}$  avec :  $\tilde{K} = KM$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0^1 & -a_1^1 & \dots & -a_{n_1-1}^1 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{11}} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0^2 & -a_1^2 & \dots & -a_{n_2-1}^2 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{22}} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} & \dots & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0^r & -a_1^r & \dots & -a_{n_r-1}^r \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{rr}} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & * & * \end{matrix} & \begin{matrix} B_1^* \\ \vdots \\ B_r^* \end{matrix} \end{array} \\ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & * \end{matrix} & \begin{matrix} B_2^* \\ \vdots \\ B_r^* \end{matrix} \end{array} \\ \vdots \\ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} B_r^* \\ \vdots \\ B_r^* \end{matrix} \end{array} \end{bmatrix}$$

$\xleftarrow{r} \quad \xleftarrow{m-r}$   
 $\uparrow n_1 \quad \uparrow n_2 \quad \uparrow n_r$

L'équation caractéristique du système global en boucle ouverte s'écrit comme :

$$D_{BO}(s) = |sI - \tilde{A}| = \prod_{i=1}^r |sI - \tilde{A}_{ii}| = \prod_{i=1}^r (s^{n_i} + a_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + \dots + a_0^i)$$

On désigne par  $n_i$  l'indice de commandabilité de  $u_i$  qui est la dimension du sous-système  $i$ , donc chaque entrée  $u_i$  commande un sous-système monovariable composé de  $n_i$  états.

$$u = g y_c - \tilde{K} \tilde{x} \quad (5.15)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \\ \vdots \\ u_m \\ \underbrace{\phantom{u}}_u \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \tilde{k}_0^1 & \tilde{k}_1^1 & \dots & \tilde{k}_{n_1-1}^1 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{k}_0^2 & \tilde{k}_1^2 & \dots & \tilde{k}_{n_2-1}^2 \\ \vdots & & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{k}_0^r & \tilde{k}_1^r & \dots & \tilde{k}_{n_r-1}^r \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \end{array} \\ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \end{array} \\ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \end{array} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n_1} \\ \tilde{x}_{n_1+1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n_1+n_2} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n_1+n_2+1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n_1+n_2+\dots+n_r} \\ \underbrace{\phantom{\tilde{x}}}_{\tilde{x}} \end{bmatrix} + g y_c$$

$\xleftarrow{r} \quad \xleftarrow{m-r}$   
 $\tilde{K}$

En remplaçant la loi de commande (5.15) dans (5.14), il vient :

$$\dot{\tilde{x}} = \underbrace{(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})}_{\tilde{A}_{BF}} \tilde{x} + g y_c \quad \text{où} \quad \tilde{A}_{BF} = (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})$$

$$\tilde{B}\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{k}_0^1 & \tilde{k}_1^1 & \dots & \tilde{k}_{n_1-1}^1 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & & 0 & \tilde{k}_0^r & \tilde{k}_1^r & \dots & \tilde{k}_{n_r-1}^r \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{BF} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & & 1 \\ -(a_0^1 + \tilde{k}_0^1) & -(a_1^1 + \tilde{k}_1^1) & \dots & -(a_{n_1-1}^1 + \tilde{k}_{n_1-1}^1) \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ -(a_0^r + \tilde{k}_0^r) & -(a_1^r + \tilde{k}_1^r) & \dots & -(a_{n_r-1}^r + \tilde{k}_{n_r-1}^r) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique du système global en boucle fermée est :

$$\begin{aligned} |sI - \tilde{A}_{BF}| &= \prod_{i=1}^r |sI - \tilde{A}_{iiBF}| \\ &= \prod_{i=1}^r (s^{n_i} + (a_{n_i-1}^i + \tilde{k}_{n_i-1}^i)s^{n_i-1} + \dots + (a_1^i + \tilde{k}_1^i)s + (a_0^i + \tilde{k}_0^i)) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée est :

$$|sI - \tilde{A}_{BF}^d| = \prod_{i=1}^r |sI - \tilde{A}_{iiBF}^d| = \prod_{i=1}^r (s^{n_i} + \alpha_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + \dots + \alpha_1^i s + \alpha_0^i) \quad (5.17)$$

Par identification de (5.16) et (5.17), il vient (pour  $i = 1 \dots r$ ) :

$$\begin{aligned} \alpha_0^i &= a_0^i + \tilde{k}_0^i & \tilde{k}_0^i &= \alpha_0^i - a_0^i \\ \alpha_1^i &= a_1^i + \tilde{k}_1^i & \tilde{k}_1^i &= \alpha_1^i - a_1^i \\ & \vdots & & \\ \alpha_{n_i-1}^i &= a_{n_i-1}^i + \tilde{k}_{n_i-1}^i & \tilde{k}_{n_i-1}^i &= \alpha_{n_i-1}^i - a_{n_i-1}^i \end{aligned} \quad \Longrightarrow$$

où

$\alpha_j^i$  sont les coefficients de l'équation caractéristique en boucle ouverte du sous-système  $i$ .

$\alpha_j^i$  sont les coefficients de l'équation caractéristique désirée en boucle fermée du sous-système  $i$ .

Finalement :  $K = \tilde{K}M^{-1}$

### 3.1.1 Résumé : Algorithme de placement de pôles – décomposition en $r$ ( $r < m$ ) sous-systèmes commandables

Soit un système à commander :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

L'on dispose d'un spectre désiré ( $n$  pôles désirés en boucle fermée)

La commande par retour d'état à appliquer au système est :  $u(t) = g y_c(t) - K x(t)$

**Etape 1 :** Décomposer le système en  $r$  ( $r < m$ ) s. s. commandables :  $x = M\tilde{x}$  (calcul de  $M$  et  $M^{-1}$ )

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}\end{aligned} \quad \text{Avec : } \tilde{A} = M^{-1}A M, \tilde{B} = M^{-1}B, \tilde{C} = CM$$

**Etape 2 :** Détermination du polynôme caractéristique du système global en BO :

$$D_{BO}(s) = |sI - \tilde{A}| = \prod_{i=1}^r |sI - \tilde{A}_{ii}| = \prod_{i=1}^r (s^{n_i} + a_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + \dots + a_0^i)$$

**Etape 3 :** Détermination du polynôme caractéristique désiré en BF :

$$D_{BF}^d(s) = |sI - \tilde{A}_{BF}^d| = \prod_{i=1}^r |sI - \tilde{A}_{ii}^d| = \prod_{i=1}^r (s^{n_i} + \alpha_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + \dots + \alpha_1^i s + \alpha_0^i)$$

**Etape 4 :** Calcul du retour d'état  $\tilde{K}$  dans la base canonique compagne de commandabilité pour  $i = 1 \dots r$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_0^1 & \tilde{k}_1^1 & \dots & \tilde{k}_{n_1-1}^1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{k}_0^2 & \tilde{k}_1^2 & \dots & \tilde{k}_{n_2-1}^2 & \dots & \dots & \vdots & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \tilde{k}_0^r & \tilde{k}_1^r & \dots & \tilde{k}_{n_r-1}^r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_j^i = \alpha_j^i - a_j^i \quad \text{avec : } j = 0 \dots n_i - 1$$

**Etape 5 :** Calcul de la matrice des gains  $K$  du retour d'état dans la base initiale :  $K = \tilde{K}M^{-1}$

**Exemple 5.2** Soit le système :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

Calculer le retour d'état  $K$  permettant d'avoir en boucle fermée les pôles :  $p_1 = -1, p_2 = -2, p_3 = -3, p_4 = -4$ .



### 3.2 Système complètement commandable par « $m$ » entrées

On décompose le système en  $m = \text{rang}(B)$  sous systèmes commandables.

On pose  $x = M\tilde{x}$ , il vient :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}\end{aligned}\tag{5.18}$$

où :

$$\tilde{A} = M^{-1}A M, \tilde{B} = M^{-1}B, \tilde{C} = CM, u = g y_c - \tilde{K}\tilde{x} \text{ avec : } \tilde{K} = KM$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0^1 & -a_1^1 & \dots & -a_{n_1-1}^1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & & * \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & & * \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0^2 & -a_1^2 & \dots & -a_{n_2-1}^2 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & & * \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & & * \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0^m & -a_1^m & \dots & -a_{n_m-1}^m \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette fois-ci la matrice  $\tilde{A}$  n'est pas triangulaire par blocs, ceci va compliquer le calcul de l'équation caractéristique en boucle ouverte. Cependant, on peut choisir une matrice des gains  $K$  de façon que la matrice  $\tilde{A}_{BF}$  soit triangulaire.

Pour des raisons de simplicité et de lisibilité des expressions, on se limite au cas où le système est décomposé en deux sous systèmes ( $m=2$ ).

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & a_{11} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & a_{12} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & a_{21} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & a_{22} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & r_{12} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & 0 \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$\tilde{A}_{BF} = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & a_{11} - \tilde{k}_{11} - r_{12}\tilde{k}_{21} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & a_{12} - r_{12}\tilde{k}_{22} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & a_{21} - \tilde{k}_{21} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & a_{22} - \tilde{k}_{22} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{BF}^d = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \alpha_{11} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \alpha_{12} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \alpha_{21} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \alpha_{22} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Pour avoir une matrice  $\tilde{A}_{BF}$  triangulaire, on prend  $\alpha_{21} = [0 \quad \dots \quad 0]$ .

Par identification de  $\tilde{A}_{BF}$  et  $\tilde{A}_{BF}^d$  terme à terme, il vient :

$$\begin{aligned} \alpha_{22} &= a_{22} - \tilde{k}_{22} & \tilde{k}_{22} &= a_{22} - \alpha_{22} \\ \alpha_{21} - \tilde{k}_{21} &= 0 & \tilde{k}_{21} &= \alpha_{21} \\ \alpha_{11} &= a_{11} - \tilde{k}_{11} - r_{12}\tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{11} &= a_{11} - r_{12}\tilde{k}_{21} - \alpha_{11} \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

Dans le cas général :

$$\begin{aligned}\tilde{k}_{mm} &= a_{mm} - \alpha_{mm} \\ \tilde{k}_{ij} &= a_{ij} \quad i > j \\ \tilde{k}_{ii} &= a_{ii} - \alpha_{ii} - \sum_{j=i+1}^m r_{ij} \tilde{k}_{ji}\end{aligned}$$

Finalement :  $K = \tilde{K} M^{-1}$

### 3.2.1 Résumé : Algorithme de placement de pôles – décomposition en $m$ sous-systèmes commandables

Soit un système à commander :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

On dispose de  $n$  pôles désirés en BF

La commande par retour d'état à appliquer au système est :  $u(t) = g y_c(t) - K x(t)$

**Etape 1 :** Décomposer le système en «  $m$  » s. s. commandables :  $x = M \tilde{x}$  (calcul de  $M$  et  $M^{-1}$ )

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} u \\ y &= \tilde{C} \tilde{x}\end{aligned} \quad \text{Avec : } \tilde{A} = M^{-1} A M, \tilde{B} = M^{-1} B, \tilde{C} = C M$$

**Etape 2 :** Détermination des vecteurs :  $a_{ij}$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [\tilde{A}_{11}] & \dots & [\tilde{A}_{1m}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\tilde{A}_{m1}] & \dots & [\tilde{A}_{mm}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ [-a_0^1 & -a_1^1 & \dots & -a_{n_1-1}^1] \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ [* & \dots & \dots & *] \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ [-a_0^m & -a_1^m & \dots & -a_{n_m-1}^m] \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ [-a_0^m & -a_1^m & \dots & -a_{n_m-1}^m] \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

**Etape 3 :** Détermination des vecteurs :  $\alpha_{ij}$ , On veut une matrice  $\tilde{A}_{BF}^d$  triangulaire, donc

$$\begin{aligned}
 D_{BF}^d(s) &= \prod_{i=1}^n (s - p_i) = \prod_{i=1}^m (s^{n_i} + \alpha_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + \dots + \alpha_1^i s + \alpha_0^i) \\
 &= \underbrace{(s^{n_1} + \alpha_{n_1-1}^1 s^{n_1-1} + \dots + \alpha_0^1)}_{\tilde{A}_{11}^d} \times \dots \times \underbrace{(s^{n_m} + \alpha_{n_m-1}^m s^{n_m-1} + \dots + \alpha_0^m)}_{\tilde{A}_{mm}^d} \\
 \tilde{A}_{BF}^d &= \begin{bmatrix} [\tilde{A}_{11}^d] & \dots & [*] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & \dots & [\tilde{A}_{mm}^d] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ [-\alpha_0^1 & -\alpha_1^1 & \dots & -\alpha_{n_1-1}^1] \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ [* & \dots & \dots & *] \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ [0 & \dots & \dots & 0] \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ [-\alpha_0^m & -\alpha_1^m & \dots & -\alpha_{n_m-1}^m] \end{bmatrix} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

**Etape 4 :** Calcul du retour d'état  $\tilde{K}$  dans la base canonique compagne de commandabilité.

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \tilde{k}_{m1} & \tilde{k}_{m2} & \dots & \tilde{k}_{mm} \end{bmatrix}_{(m \times n)} \quad \text{avec:} \quad \begin{aligned} \tilde{k}_{mm} &= a_{mm} - \alpha_{mm} \\ \tilde{k}_{ij} &= a_{ij} \quad i > j \\ \tilde{k}_{ii} &= a_{ii} - \alpha_{ii} - \sum_{j=i+1}^m r_{ij} \tilde{k}_{ji} \end{aligned}$$

**Etape 5 :** Calcul de la matrice des gains  $K$  du retour d'état dans la base initiale :  $K = \tilde{K}M^{-1}$

**Exemple 5.3** Soit le système :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

Calculer le retour d'état  $K$  permettant d'avoir en boucle fermée les pôles :  $p_1 = -1, p_2 = -2, p_3 = -3, p_4 = -4$ .

