

التقدير المجالي للنسبة في المجتمع

رأينا في المحول الأول (نظرية المعاينة) أنه إذا سحبت عينة عشوائية حجمها n بالإرجاع من مجتمع برنولي $b(1, p)$ (بحيث p تمثل نسبة تحقق خاصية معينة في المجتمع أي احتمال النجاح، و q تمثل نسبة عدم تحقق هذه الخاصية أي احتمال الفشل)، فإن توزيع المعاينة لنسبة النجاح في العينة p_0 يقترب من التوزيع الطبيعي كلما كبرت n . ونكتب: $p_0 \sim \mathcal{N}(\mu_{p_0} = \mu_p = p, \sigma_{p_0} = \sqrt{\frac{p \times q}{n}})$. وأن المتغير المعياري في هذه الحالة هو:

$$Z = \frac{p_0 - p}{\sqrt{\frac{p \times q}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

1. الشكل العام لمجال الثقة حول النسبة:

$$P = p_0 \pm E$$

$$\hookrightarrow IC: P \in \left[\underbrace{p_0 - E}_{\text{الحد الأدنى}}, \underbrace{p_0 + E}_{\text{الحد الأعلى}} \right]$$

ويكون هناك احتمال قدره $(1 - \alpha)\%$ أن تقع النسبة الحقيقية في المجتمع P ضمن هذا المجال. وعليه نكتب:

$$IC: p(p_0 - E \leq P \leq p_0 + E) = (1 - \alpha)\%$$

حيث:

- $(1 - \alpha)\%$: تمثل مستوى الثقة أي درجة التأكد؛
- p_0 : يمثل النسبة في العينة، وهي مقدار نقطي لنسبة المجتمع P ؛
- E : يمثل مقدار الخطأ المعياري للتقدير.

2. اشتقاق مجال الثقة حول النسبة:

لدينا:

المحاضرة رقم (11): التقدير المجالي للنسبة في المجتمع ولفرق نسبتي

$$Z = \frac{p_0 - p}{\sqrt{\frac{p \times q}{n}}} \Rightarrow E = \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p \times q}{n}}$$

بتعويض عبارة الخطأ المعياري للتقدير في الشكل العام لمجال الثقة حول النسبة نجد:

$$p \left(p_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p \times q}{n}} \leq P \leq p_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p \times q}{n}} \right) = (1 - \alpha)\%$$

ملاحظة: نلاحظ وجود كل من p و q في طرفي المجال علما أنهما مجهولين (نريد تقدير p)، لذلك يتم تعويضهما بمقدراتهما النقطية p_0 و q_0 على الترتيب.

وعليه: فإن مجال الثقة حول النسبة في المجتمع في حالة المعاينة بالإرجاع يأخذ الشكل التالي:

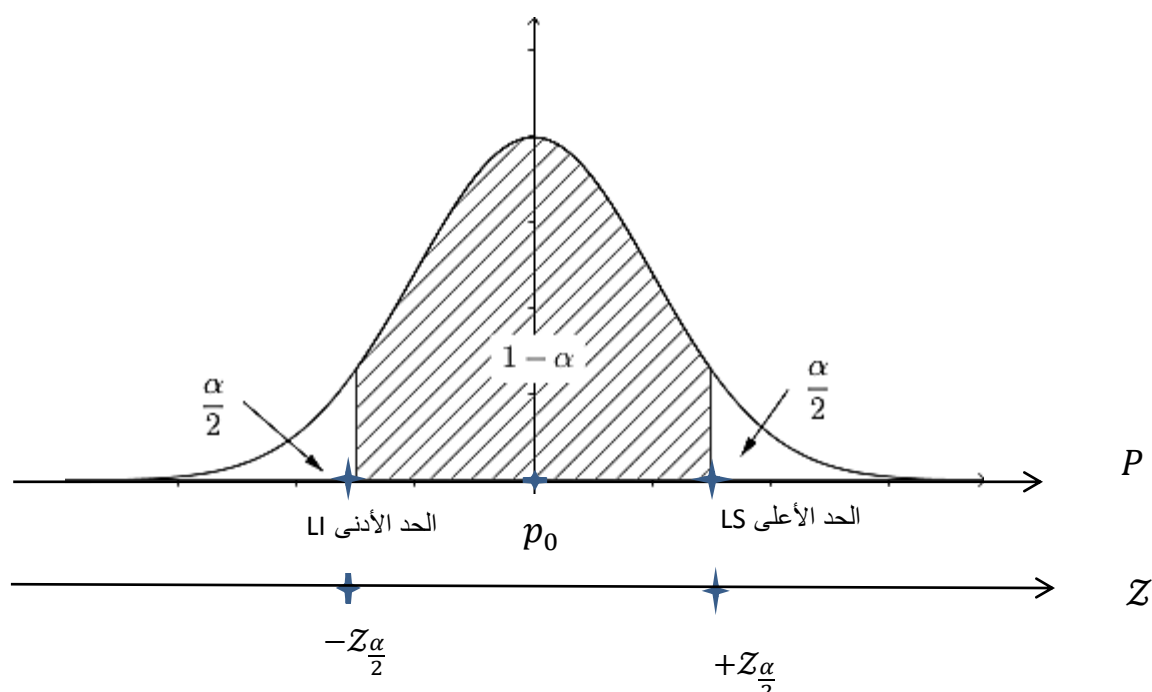
$$IC: p \left(p_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}} \leq P \leq p_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}} \right) = (1 - \alpha)\%$$

أما في حالة السحب بدون ارجاع فمجال الثقة يأخذ الشكل التالي:

$$IC: p \left(p_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}} \leq P \leq p_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}} \right) = (1 - \alpha)\%$$

ويمكن التعبير بيانيا عن مجال الثقة حول النسب بالشكل التالي:

الشكل رقم (01): التمثيل البياني لمجال الثقة حول النسبة في مجتمع واحد



مثال (01):

سُحبت عينة عشوائية تتكون من 500 مستهلك، فُوجد أن 360 منهم لا يستعملون المنتج M. المطلوب: قدر بمجال نسبة المستهلكين الذين يستعملون المنتج M في المجتمع بمستوى ثقة 95%.

الحل:

1. لدينا عبارة مجال الثقة حول النسبة في حالة السحب بالإرجاع:

$$IC: p \left(p_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}} \leq P \leq p_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}} \right) = (1 - \alpha)\%$$

2. إيجاد المجاهيل: p_0 ، q_0 ، $Z_{\frac{\alpha}{2}}$

p_0 : تمثل نسبة المستهلكين الذين يستعملون المنتج في العينة بحيث

$$p_0 = \frac{\hat{x}}{n} \quad \hat{x}: \text{عدد المستهلكين الذين يستعملون المنتج}$$

لدينا: حجم العينة هو $n = 500$ ، منهم 360 لا يستعملون المنتج، وبالتالي يمكن حساب عدد

المستهلكين الذين يستعملون المنتج: $\hat{x} = 500 - 360 = 140$ ، ومنه:

- $p_0 = \frac{\hat{x}}{n} = \frac{140}{500} = 0.28$
- $q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0.28$
 $q_0 = 0.72$
- $(1 - \alpha)\% = 0.95 \Rightarrow \alpha = 1 - 0.95 = 0.05$
 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$
 $\Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow Z_{0.025} = Z_{0.975} = \pm 1.96$$

3. التعويض العددي:

$$IC: p \left(0.28 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.28 \times 0.72}{500}} \leq P \leq 0.28 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.28 \times 0.72}{500}} \right) = 95\%$$

$$IC: p(0.28 - 0.04 \leq P \leq 0.28 + 0.04) = 95\%$$

$$IC: p(0.24 \leq P \leq 0.32) = 95\%$$

$$\hookrightarrow P \in [0.24 - 0.32]$$

إذن: هناك احتمال قدره 95% أن تقع نسبة المستهلكين الذين يستعملون المنتج M في المجتمع ضمن

المجال $[0.24 - 0.32]$.

المحاضرة رقم (11): التقدير المجالي للنسبة في المجتمع ولفرق نسبتي

ملاحظة: يمكن أيضا كتابة المجال بالشكل: $P = 0.28 \pm 0.04$ حيث قيمة الخطأ المعياري للتقدير

هي: $E = \pm 0.04$

التقدير المجالي للنسبة في المجتمع

رأينا في الفصل السابق أنه إذا سحبنا عينتين عشوائيتين n_1 و n_2 من مجتمعين برنولييين $b_1(1.p_1)$ و $b_2(1.p_2)$ على الترتيب. وكانت p_{01} و p_{02} نسبة تحقق خاصية معينة في العينتين n_1 و n_2 على الترتيب. فإن المقدار $(p_{01} - p_{02})$ هو متغير عشوائي يتبع توزيع يقترب من التوزيع الطبيعي من أجل العينات الكبيرة الحجم، بوسط $\mu_{p_{01}-p_{02}}$ وانحراف معياري $\sigma_{p_{01}-p_{02}}$. وأن المتغير المعياري في هذه الحالة هو:

$$Z = \frac{(p_{01} - p_{02}) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 \times q_1}{n_1} + \frac{p_2 \times q_2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0.1)$$

1. الشكل العام لمجال الثقة حول فرق نسبتي:

$$(P_1 - P_2) = (p_{01} - p_{02}) \pm E$$

$$\hookrightarrow IC: (P_1 - P_2) \in \left[\underbrace{(p_{01} - p_{02}) - E}_{\text{الحد الأدنى}}, \underbrace{(p_{01} - p_{02}) + E}_{\text{الحد الأعلى}} \right]$$

2. اشتقاق مجال الثقة حول فرق نسبتي:

لدينا المتغير المعياري:

$$Z = \frac{(p_{01} - p_{02}) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 \times q_1}{n_1} + \frac{p_2 \times q_2}{n_2}}}$$

ومنه عبارة الخطأ المعياري للتقدير ستكون كالتالي:

$$E = \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{p_{01} \times q_{01}}{n_1} + \frac{p_{02} \times q_{02}}{n_2}}$$

بتعويض عبارة الخطأ المعياري للتقدير في الشكل العام لمجال الثقة حول فرق نسبتي نجد:

$$p \left((p_{01} - p_{02}) - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_1 \times q_1}{n_1} + \frac{p_2 \times q_2}{n_2}} \leq (p_1 - p_2) \leq (p_{01} - p_{02}) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_1 \times q_1}{n_1} + \frac{p_2 \times q_2}{n_2}} \right) = (1 - \alpha)\%$$

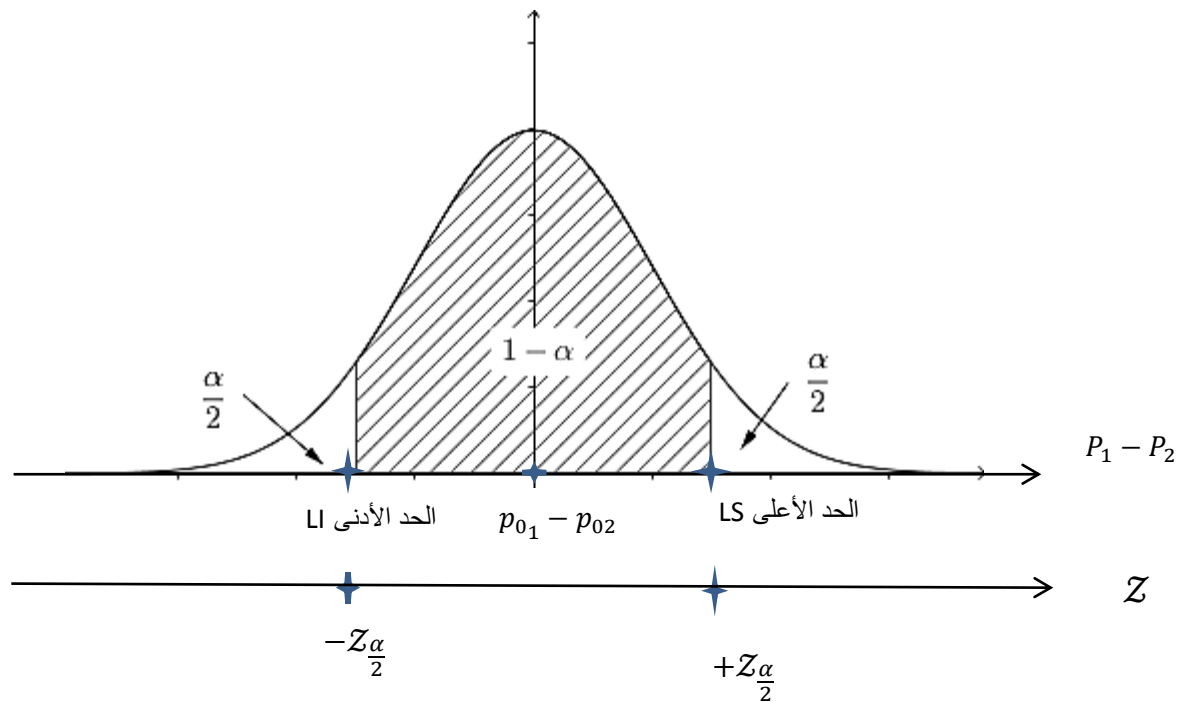
المحاضرة رقم (11): التقدير المجالي للنسبة في المجتمع ولفرق نسبتي

هذه العبارة تمثل مجال الثقة حول فرق نسبتي في حالة المعاينة بالإرجاع. ونظرا لظهور q_1, p_1 ،
 q_2 و p_2 في طرفي المجال يتم تعويضها بمقدراتها النقطية $p_{01}, q_{01}, p_{02}, q_{02}$ ، وبالتالي يصبح مجال
 الثقة حول فرق نسبتي في حالة المعاينة بالإرجاع كالتالي:

$$IC: p \left((p_{01} - p_{02}) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{p_{01} \times q_{01}}{n_1} + \frac{p_{02} \times q_{02}}{n_2}} \right) = (1 - \alpha)\%$$

ويتم التعبير بيانيا عن مجال الثقة حول فرق نسبتي بالشكل التالي:

الشكل رقم (02): التمثيل البياني لمجال الثقة حول فرق نسبتي



مثال (02):

سحبنا عينة حجمها 5000 وحدة من إنتاج آلة A فكانت 2400 وحدة منها مخالفة
 للمواصفات. ومن إنتاج آلة أخرى B سحبنا عينة حجمها 2000 وحدة، فوجد أن 800 وحدة منها مطابقة
 للمواصفات. المطلوب:

- أنشئ مجال الثقة حول الفرق بين النسب الحقيقية للإنتاج المخالف للمواصفات بين الآلتين A و B عند
 مستوى ثقة 98%.

الحل:

لدينا المعطيات:

المحاضرة رقم (11): التقدير المجالي للنسبة في المجتمع ولفرق نسبتي

الآلة B	الآلة A	
$n_2 = 2000$	$n_1 = 5000$	- حجم العينة:
$\hat{x}_2 = 1200$	$\hat{x}_1 = 2400$	- عدد الوحدات المخالفة للمواصفات $\hat{x}$
800	2600	- عدد الوحدات المطابقة للمواصفات

1. الشكل العام لمجال الثقة حول فرق نسبتي:

$$IC: p \left((p_{01} - p_{02}) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{p_{01} \times q_{01}}{n_1} + \frac{p_{02} \times q_{02}}{n_2}} \right) = (1 - \alpha)\%$$

2. البحث عن المجاهيل: $Z_{\frac{\alpha}{2}}, q_{02}, p_{02}, q_{01}, p_{01}$

p_{01}, p_{02} : تمثل نسبة الوحدات المخالفة للمواصفات في العينتين n_1 و n_2 على الترتيب.

q_{01}, q_{02} : تمثل نسبة الوحدات المطابقة للمواصفات في العينتين n_1 و n_2 على الترتيب.

نقوم بحسابها كما يلي:

$$\bullet \begin{cases} p_{01} = \frac{\hat{x}_1}{n_1} = \frac{2400}{5000} = 0.48 \\ q_{01} = 1 - p_{01} = 1 - 0.48 = 0.52 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} p_{02} = \frac{\hat{x}_2}{n_2} = \frac{1200}{2000} = 0.6 \\ q_{02} = 1 - p_{02} = 1 - 0.6 = 0.4 \end{cases}$$

$$\bullet Z_{\frac{\alpha}{2}} = ?$$

$$(1 - \alpha)\% = 0.98 \Rightarrow \alpha = 1 - 0.98 = 0.02$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99$$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow Z_{0.01} = Z_{0.99} = \pm 2.33$$

3. التعويض العددي:

$$IC: p \left((0.4 - 0.6) \pm 2.33 \times \sqrt{\frac{0.48 \times 0.52}{5000} + \frac{0.6 \times 0.4}{2000}} \right) = 98\%$$

$$IC: p(-0.2 - 0.03 \leq p_1 - p_2 \leq -0.2 + 0.03) = 98\%$$

$$IC: p(-0.23 \leq p_1 - p_2 \leq -0.17) = 98\%$$

$$\hookrightarrow (p_1 - p_2) \in [-0.23, -0.17]$$