

CH.1: Résolution d'équations non Linéaires $f(x) =$

1. Méthode graphique de séparation des racines
2. Méthode de dichotomie (Bissection).
3. Méthode de Newton
4. Méthode des points fixes

CH.2: Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes directes ($Ax = B$)

1. Méthode de Gauss.
2. " de " - Jordan
3. " de Crout (LU)
4. " de Cholesky.

CH.3: Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes indirectes (Itératives)

1. Méthode de Jacobi
2. " de Gauss-Seidel

CH.4: Interpolation polynomiale

1. Lagrange
2. Newton.

CH.5: Intégration Numérique

1. Trapez.
2. Simpson
3. Runge Kutta

CH.1: RESOLUTION D'EQUATIONS NON LINEAIRES

$$f(x) = 0.$$

Dans ce chapitre, nous abordons quelques méthodes numériques qui permettent d'approcher une racine de $f(x)$ sur un domaine donné (car il n'est pas, tout le temps, possible de trouver exactement la racine de $f(x)$ recherchée). Néanmoins nous pouvons, par des méthodes algébriques (graphiques) connaître l'existence et le nombre de racines en les séparant.

Soit $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée.

Nous désirons trouver une ou plusieurs solutions à l'équation $F(x) = 0$.

Pour les différentes méthodes nous supposons que F est une fonction continue et qu'il existe un intervalle $[a, b]$ où l'éq. a une et une seule racine que l'on notera α .

Pour choisir l'intervalle $[a, b]$ on peut :

- soit utiliser la méthode graphique (tracer la courbe et situer la solution d'où le choix de $[a, b]$).
- soit utiliser la méthode algébrique : la méthode de la séparation des racines en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

Définition :

$F(x)$ admet une racine séparée dans $]a, b[$ si et seulement si " α " est unique.

Aussi séparer les racines de " $F(x) = 0$ " revient à déterminer les intervalles $]a, b[$ dans lesquels chaque racine est unique. Pour ceci on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des Valeurs Intermédiaires :

si F est continue dans $[a, b]$ et $F(a) \cdot F(b) < 0$ alors
 $\exists \alpha \in]a, b[$ tel que $F(\alpha) = 0$.

Si de plus $F(x)$ est monotone dans $[a, b]$ alors α est unique dans $[a, b]$.

I.1: Méthode algébrique :

EX: Séparons les racines de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ dans l'intervalle $[-3, 3]$.

• $F(x) = x^3 - 3x + 1$ est une fonction polynomiale donc elle est continue dans $[-3, 3]$.

• $F(-3) = -17 < 0$, $F(3) = 19 > 0$ donc $F(-3) \cdot F(3) < 0$ aussi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une racine α de $F(x) = 0$ dans $[-3, 3]$.

pour étudier l'unicité de la racine α étudions la monotonie de celle-ci :

$$F(x) = x^3 - 3x + 1; \quad F'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

x	-3	-1	1	3	
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	-17	3	-1	19	

α_1 Unique dans $[-3, -1]$ car $F(x)$ est monotone et $F(-3) \cdot F(-1) < 0$

α_2 " " $[-1, 1]$ " " " " " $F(-1) \cdot F(1) < 0$

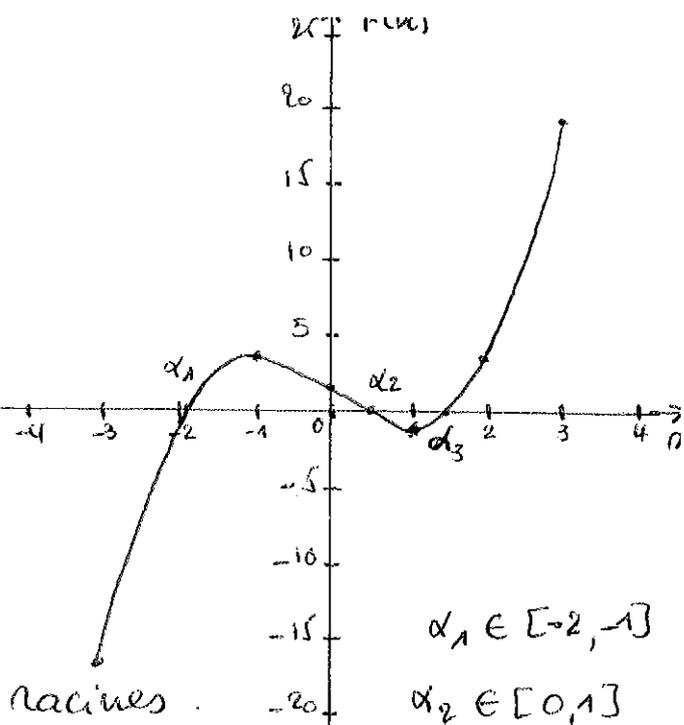
α_3 " " $[1, 3]$ " " " " " $F(1) \cdot F(3) < 0$

d'où la séparation des racines.

I.2 : Méthode graphique :

Méthode ① :

Dans ce cas les racines $F(x) = 0$ représentent les points d'intersection du graphe de $F(x)$ avec l'axe "Ox".
 Donc, il suffit de tracer le graphe de $F(x)$ et de déterminer les points d'intersection. Ceci fait nous aurons les intervalles d'où la séparation des racines.



$\alpha_1 \in [-2, -1]$
 $\alpha_2 \in [0, 1]$
 $\alpha_3 \in [1, 2]$

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$	$+\infty$
$F(x)$	$-\infty$	-51	-17	-1	3	1	-1	3	19	53	$+\infty$

\ominus α_1 \oplus α_2 \ominus α_3 \oplus

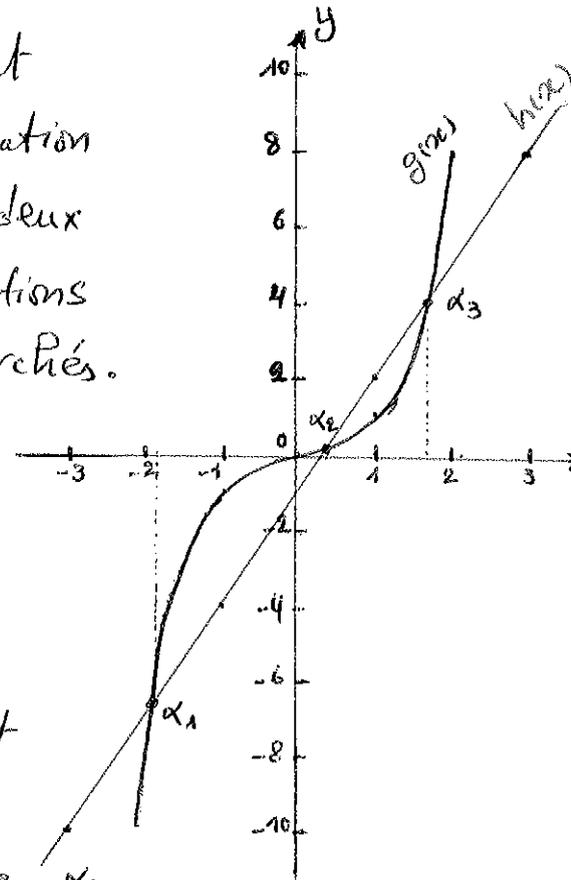
Méthode ② :

Dans le cas où $F(x)$ est compliquée, il faut transformer l'équation $F(x) = 0$ par une équation équivalente $g(x) = h(x)$ avec $g(x)$ et $h(x)$ deux fonctions plus simples. Les points d'intersection des graphes de $g(x)$ et $h(x)$ sont alors recherchés.

Pour notre exemple on aurait pu transformer $F(x) = 0$ en deux fonctions plus simples.

En effet $x^3 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 3x - 1$

$\Rightarrow g(x) = x^3$ et $h(x) = 3x - 1$ d'où le graphe et les solutions qui correspondent aux intersections des deux courbes.



		α_1	α_2	α_3							
x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	$+\infty$

Vous avons 3 intersections
 \Rightarrow 3 solutions
 et 3 intervalles.

Changement de signe de $F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) \text{ devient } + \text{ grand que } g(x) \\ \text{ou} \\ g(x) \text{ " " " " } h(x) \end{cases}$

I.3: Méthode de la Dichotomie (Bissection):

La méthode de la bissection est basée sur le résultat d'analyse mathématique suivant (Théorème des Valeurs Intermédiaires).

Théorème 1: (Conditions de Convergence).

On considère un intervalle $[a, b]$ et une fonction $F(x)$ continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose que $F(a) \cdot F(b) < 0$ et que l'équation $F(x) = 0$ admet une unique solution " α " sur l'intervalle $[a, b]$.

La méthode de dichotomie consiste à construire une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers " α " de la manière suivante:

Initialisation: on prend pour α_0 le milieu de $[a, b]$. La racine se trouve alors dans l'un des deux intervalles $]a, \alpha_0[$ ou $]\alpha_0, b[$ ou bien elle est égale à α_0 .

* Si $F(a) \cdot F(\alpha_0) < 0$, alors $\alpha \in]a, \alpha_0[$.

on pose $a_1 = a$, $b_1 = \alpha_0$

* Si $F(a) \cdot F(\alpha_0) = 0$, alors $\alpha = \alpha_0$.

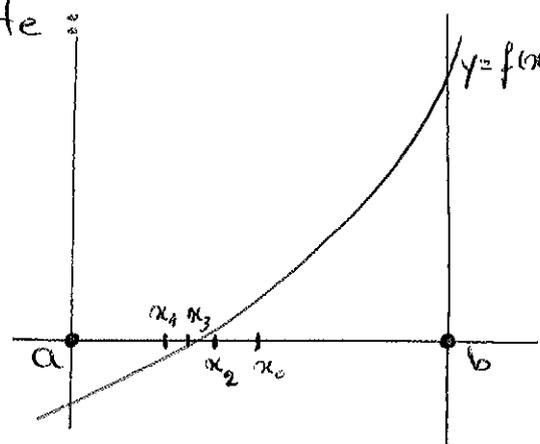
* Si $F(a) \cdot F(\alpha_0) > 0$, alors $\alpha \in]\alpha_0, b[$. on pose $a_1 = \alpha_0$, $b_1 = b$.

On prend alors pour α_1 le milieu de $[a_1, b_1]$.

On construit ainsi une suite $\alpha_0 = \frac{a+b}{2}$, $\alpha_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, ..., $\alpha_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$. Nous disons alors que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des solutions approchées et " α " la racine exacte de $F(x) = 0$.

Proposition:

La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers " α ". De plus, nous avons l'estimation suivante:



Dichotomie

$$|\alpha - \alpha_n| \leq \frac{|b_n - a_n|}{2} = \frac{|b_{n-1} - a_{n-1}|}{2^2} = \dots = \frac{|b_0 - a_0|}{2^{n+1}}$$

avec $a_0 = a$, $b_0 = b$.

D'où $|\alpha - \alpha_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |b - a|$

Précision de l'approximation :

Pour approcher la racine α avec une précision inférieure à ϵ en utilisant la méthode de la bissection, il faut que :

$$|\alpha - \alpha_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |b - a| < \epsilon \Rightarrow \frac{|b - a|}{\epsilon} < 2^{n+1}$$

D'où $n > \frac{\ln\left(\frac{|b-a|}{\epsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$ si nous commençons les itérations à partir de $\alpha_0 = \frac{a+b}{2}$.

Algorithme (Dichotomie) : $f, a, b, \text{epsilon}$

Variables locales : $\alpha_m, \alpha_1, \alpha_2$.

$$\alpha_1 := a$$

$$\alpha_2 := b$$

Tant que $|\alpha_2 - \alpha_1| / 2 > \text{epsilon}$, faire.

$$\alpha_m := (\alpha_2 + \alpha_1) / 2$$

si $f(\alpha_m) = 0$ alors

renvoyer α_m

Fin

sinon si $f(\alpha_1) \cdot f(\alpha_m) < 0$ alors

$$\alpha_2 := \alpha_m$$

sinon

$$\alpha_1 := \alpha_m$$

Fin si

Fin Tant que

renvoyer α_m

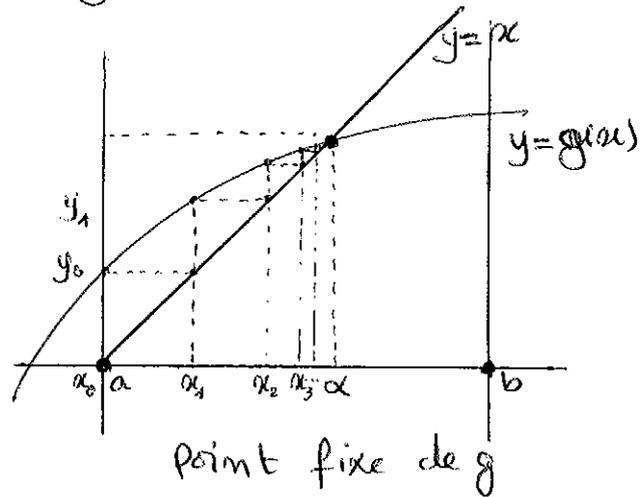
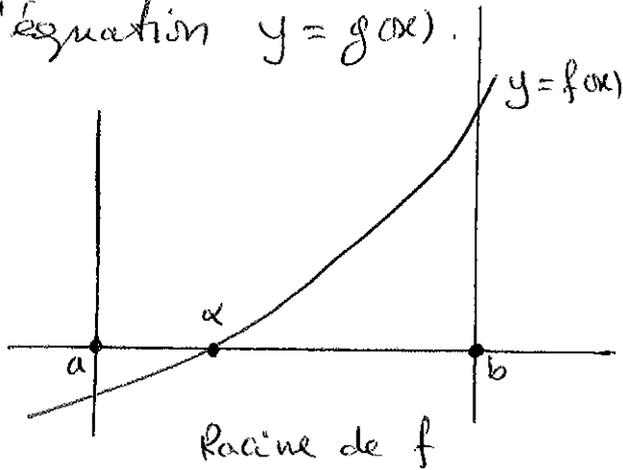
Fin

I.4 = Méthode des approximations successives (point fixe) :

Cette méthode consiste à écrire l'équation $F(x) = 0$ sous la forme équivalente à $x = g(x)$ avec g une fonction continue

$$F(x) = 0 \iff x = g(x), \quad x \in [a, b].$$

Géométriquement, on a remplacé la recherche de l'intersection du graphe de la fonction $F(x)$ avec l'axe "Ox", par la recherche de l'intersection de la droite d'équation $y = x$ avec la courbe d'équation $y = g(x)$.



Ceci revient à construire une suite $\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n), & n \geq 0 \\ x_0 \text{ donné dans } [a, b]. \end{cases}$

question : Quelles conditions doit vérifier $g(x)$ pour que ce point fixe existe et qu'il soit unique ?

Théorème du point fixe : (C.C)

Soit $g(x)$ une fonction réelle, définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ telle que :

- 1) $g(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]$ (on dit que l'intervalle $[a, b]$ est stable par $g(x)$). Si on écrit $I = [a, b]$ alors $g(I) \subset I$
- 2) $\exists k \in \mathbb{R}, 0 < k < 1$ tel que $|g'(x)| \leq k < 1$,
 $k = \max_{[a, b]} |g'(x)|$. On dit que $g(x)$ est strictement contracte.

ou

par théorème : g est contractante dans $[a, b]$ si g est

continuellement dérivable dans $[a, b]$ et $\textcircled{7}$

$\max |g'(x)| = k < 1$ avec $x \in [a, b]$.

k est appelée constante de contraction.

Alors $g(x)$ admet un point fixe unique " α " dans $I = [a, b]$ et la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers ce point $\forall x_0 \in [a, b]$.

De plus, nous avons :

$$|x_n - \alpha| \leq |x_1 - x_0| \frac{k^n}{1-k}$$

erreur

Précision de l'approximation :

Le nombre minimum d'itérations pour que la solution soit approchée avec une précision ε est : $|x_n - \alpha| < \varepsilon$

Sachant que $|x_n - \alpha| \leq |x_1 - x_0| \frac{k^n}{1-k}$

donc

$$n > \frac{\ln \left[\frac{(1-k)\varepsilon}{|x_1 - x_0|} \right]}{\ln(k)}$$

avec $k = \max_{[a,b]} |g'(x)|$

Algorithme (point fixe) : $g, x_0, \text{epsilon}$

variables locales : x

$x := g(x_0)$

tant que $|x - x_0| > \text{epsilon}$, faire.

$x_0 := x$

$x := g(x_0)$

Fin tant que

Renvoyer x

Fin

I.5: Méthode de Newton =

1) Interprétation géométrique:

L'idée est de remplacer l'arc de la courbe représentatif de la fonction $F(x)$ par sa tangente au point α_0 .

L'équation de la tangente au point α_0 est donnée par $y = F(\alpha_0) + F'(\alpha_0)(x - \alpha_0)$.

L'abscisse α_1 du point d'intersection de cette tangente avec l'axe "Ox" est donnée par :

$$F(\alpha_0) + F'(\alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{F(\alpha_0)}{F'(\alpha_0)}.$$

α_1 est une meilleure approximation de α que α_0 .

- De proche en proche, nous construisons une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de solution approchées en utilisant la relation de récurrence :

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{F(\alpha_n)}{F'(\alpha_n)}$$

Nous sommes alors ramené à un problème de type point fixe qui s'écrit :

$$\begin{cases} \alpha_0 \text{ donné dans } [a, b]. \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{F(\alpha_n)}{F'(\alpha_n)} \end{cases}$$

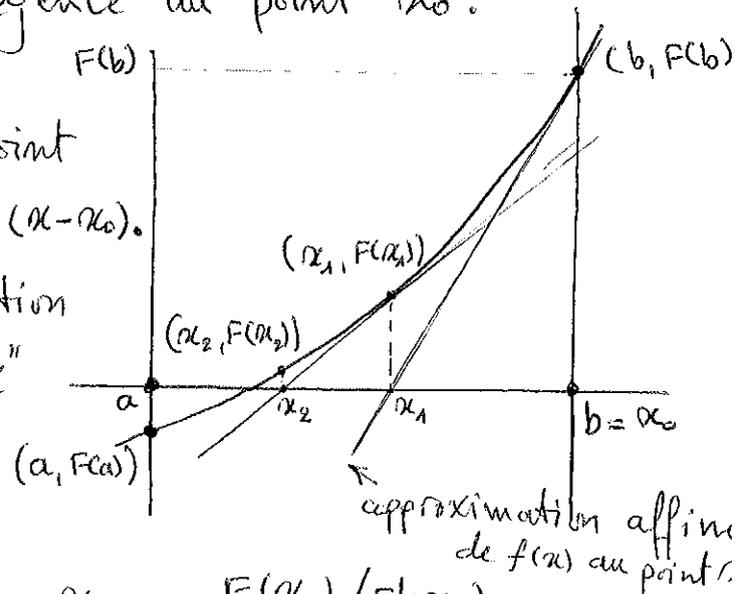
Théorème 1: (Convergence globale).

Soit $F(x) = 0$, si $F \in C^2[a, b]$ (deux fois dérivable et F'' continue) vérifie :

1. $F(a) \cdot F(b) < 0$,

2. $\forall x \in [a, b] \quad F'(x) \neq 0$ (stricte monotonie de F),

3. $\forall x \in [a, b] \quad F''(x) \neq 0$ (Conserve le même signe dans $[a, b]$)



4. Alors en choisissant $x_0 \in [a, b]$ tel que $F(x_0) \cdot F''(x_0) > 0$, les itérations de Newton convergent vers l'unique solution " α " de $F(x) = 0$ dans $[a, b]$.

- si $F(x_0) \cdot F''(x_0) < 0$ on ne peut rien dire quant à la convergence du processus, il faut vérifier les hypothèses de la conv globale.

Théorème 2: (Convergence locale)

Si en plus des quatre hypothèses de la convergence globale $F(x)$ vérifie une cinquième hypothèse qui est:

$$5. |F(c)/F'(c)| \leq b-a \quad \text{où } \begin{cases} c = a \text{ si } |F'(a)| \leq |F'(b)| \\ c = b \text{ si } |F'(b)| \leq |F'(a)| \end{cases} \text{ alors } \forall x \in [a, b].$$

le processus de Newton converge vers la solution " α ".

2) Estimation de l'erreur:

pour la méthode de Newton on a l'estimation d'erreur suivante:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M}{2m} |x_{n-1} - \alpha|^2, \quad \forall n > 0.$$

$$\text{Avec } M = \max_{x \in [a, b]} |F''(x)|, \quad m = \min_{x \in [a, b]} |F''(x)|$$

Cette inégalité peut s'écrire en fonction de x_0 :

$$|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{M}{2m}\right)^{2^n - 1} |x_0 - \alpha|^{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Algorithme (Newton): $f, df, x_0, \text{epsilon}$

Variables locales: x

$$i := 1, \quad x(i) = x_0, \quad x(i+1) = x_0 - f(x_0) / df(x_0)$$

tantque $|x(i+1) - x(i)| > \text{epsilon}$

$$i := i + 1$$

$$x(i+1) = x(i) - f(x(i)) / df(x(i))$$

Fin tantque

Renvoyer x

Fin

CH 02 :

RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES (MÉTHODES DIRECTES).

Le problème consiste à trouver la solution du système d'équations :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

En notation matricielle ce système s'écrit : $Ax = b$

où : $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, désigne une matrice de taille $(n \times n)$ de nombres réels ou complexes, $b = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$, est un vecteur colonne réel ou complexe et $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, est le vecteur des inconnues du système. La relation précédente équivaut aux équations :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(notation condensée).

La matrice A est dite régulière (ou non singulière) si $\det(A) \neq 0$. On a existence et unicité de la solution x (pour n'importe quel vecteur b donné) si et seulement si la matrice associée au système linéaire est régulière. Dans ce cas la solution est donnée par : $Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$

avec $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^*)^t$ inv de A .

A^* : est la Comatrice donnée par : $A^* = (C_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

A_{ij} : (mineur de A) est la matrice A sans la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Formule générale pour le calcul de $\det(A)$ selon les lignes:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

II. 1: Méthode de Cramer :

L'unique solution du système $Ax = b$ ($\det(A) \neq 0$) est donnée selon Cramer par :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par le vecteur b.

Exp : trouver x_1, x_2 et x_3 .

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ 6x_1 + 4x_2 = 26 \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A & x = b \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 8 - 6 - 4 = -2$$

$x_1 = ?$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 26 & 4 & 0 \\ 35 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 26 & 0 \\ 35 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 26 & 4 \\ 35 & 5 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-6}{-2} = 3$$

$x_2 = ?$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 2 \\ 6 & 26 & 0 \\ 8 & 35 & 1 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow x_2 = \frac{-4}{-2} = 2$$

$x_3 = ?$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 6 & 4 & 26 \\ 8 & 5 & 35 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow x_3 = \frac{-2}{-2} = 1$$

Cette méthode de Cramer est inadaptée pour résoudre les systèmes de grandes tailles car il y a trop de déterminants à calculer. Pour cela, on a recours à d'autres méthodes de résolution des syst_s d'équations $Ax = b$. Ces méthodes sont classées dans deux groupes:

- Les méthodes directes
- " " itératives. (chap 03).

II. 2 : Méthode d'élimination de Gauss :

La méthode de Gauss, consiste à transformer le système $Ax = b$ en un système triangulaire supérieur (éliminer tous les éléments qui se trouvent sous la diagonale).

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice non singulière. L'algo₌ de Gauss est le suivant : on pose $A^{(0)} = A$, c'est-à-dire $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$ pour $i, j = 1, 2, \dots, n$; pour $k = 1, 2, \dots, n$ on calcule :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \equiv a_{kk}^{(k)} \neq 0 \\ L_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = k+1, \dots, n \quad (\text{Constant}) \\ a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - L_{ik} a_{kj}^{(k-1)}, \quad i = k+1, \dots, n \end{array} \right.$$

A la fin de ce procédé, on obtient : $Ax = b \Leftrightarrow \tilde{A}x = \tilde{b}$
Donnons la méthode à travers un exemple.

Soit à résoudre le système :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Ax = b.$$

On adopte l'écriture suivante : $JA = [A; b]$ c'est la matrice augmentée.

$$JA^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{array} \right] \begin{matrix} L_1^{(0)} \\ L_2^{(0)} \\ L_3^{(0)} \end{matrix}$$

Le but est d'obtenir une matrice \tilde{A} triangulaire supérieure.

Etape N°1: $k=1$, $a_{11}^{(0)} \neq 0$, on élimine le 1^{er} terme a_{i1} des deux autres lignes.

Pivot 1 $\neq 0$

$$\begin{array}{l} L_1^{(0)} \\ L_2^{(0)} \\ L_3^{(0)} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} L_2^{(0)} - \frac{6}{2} L_1^{(0)} \\ L_3^{(0)} - \frac{8}{2} L_1^{(0)} \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \end{array}$$

$\Leftrightarrow A^{(1)}x = b^{(1)}$

Etape N°2: $k=2$, $a_{22}^{(1)} \neq 0$

on élimine le 2^{ème} terme a_{i2} de la dernière ligne.

Pivot 2 $\neq 0$

$$\begin{array}{l} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \end{array} \leftarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & \boxed{1} & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ L_3^{(2)} \end{array} \leftarrow L_3^{(1)} - \frac{1}{1} L_2^{(1)}$$

on obtient:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ L_3^{(2)} \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} = \begin{array}{l} 10 \\ -4 \\ -1 \end{array}$$

$A^{(2)}x = b^{(2)} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$

On fait la remontée triangulaire:

$$\tilde{A}x = \tilde{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{33}^{(2)} x_3 = \tilde{b}_3 \\ x_2 = (\tilde{b}_2 - a_{23}^{(2)} x_3) / a_{22}^{(2)} \\ x_1 = (\tilde{b}_1 - a_{12}^{(2)} x_2 - a_{13}^{(2)} x_3) / a_{11}^{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

N.B:

* si, au cours des calculs, on rencontre un pivot nul, il faut permuter la ligne de ce pivot avec une ligne d'indice supérieur, présentant un pivot non nul dans la $n^{\text{ème}}$ colonne.

* le déterminant de A est donné par:

$$\det(A) = \det(\tilde{A}) = (-1)^\alpha \prod_{i=1}^n \tilde{a}_{ii}$$

α : nbr de permutation de lignes.

$$\det(A) = (-1)^0 \prod_{i=1}^3 a_{ii}^{(2)} = 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -2.$$

* On note le nouveau système $\tilde{A}x = \tilde{b}$

$$a_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(\tilde{b}_i - \sum_{k=i+1}^n \tilde{a}_{ik} x_k \right) \quad i = n, \dots, 1$$

où \tilde{a}_{ij} sont les éléments de la matrice \tilde{A}

II.2.1 * pour un syst_e d'ordre n , la méthode de Gauss nécessite $n-1$ étapes

Remarques sur le pivot :

A chaque étape de calcul le pivot $a_{kk}^{(k-1)}$ doit être non nul, sinon une permutation de lignes ou de colonnes s'impose.

sur le plan numérique :

→ |pivot| ⊕ petit (par rapport aux autres éléments de la matrice ou par rapport à la précision de la machine ⇒ cumul d'erreurs peut être important.

→ |pivot| ⊕ grand ⇒ stabilité numérique.

type de pivot :

→ Total ⇒ permutation des lignes et des colonnes.

→ Partiel ⇒ " " " ou " " "

* Pivot partiel sur les lignes → cela ne revient qu'à changer l'ordre d'énumération des lignes du système $[A|b]$.

* Pivot total → revient à permuer les éléments du vecteur inconnu x .

II.2.2 = Calcul de A^{-1} par la méthode d'élimination de Gauss :

soit une matrice A_{nn} tel que $\det(A) \neq 0$. on a $A \cdot A^{-1} = I_n$

on écrit $A_{nn}^{-1} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ et $I_n = [e_1, e_2, \dots, e_n]$

D'où $A \cdot A^{-1} = I_n \Leftrightarrow A \cdot [v_1, v_2, \dots, v_n] = [e_1, e_2, \dots, e_n]$

$\Leftrightarrow [Av_1, Av_2, \dots, Av_n] = [e_1, e_2, \dots, e_n]$.

$$\Rightarrow \begin{cases} Av_1 = e_1 \\ Av_2 = e_2 \\ \vdots \\ Av_n = e_n. \end{cases} \quad \text{--- (1)}$$

v_i est le vecteur colonne i de la matrice A^{-1} .

e_i est le vecteur i de la base canonique (ex: $e_1 = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^t$).

En appliquant la méthode d'élimination de Gauss au système (1), on

obtient :

$$\begin{cases} AV_1 = e_1 \\ AV_2 = e_2 \\ \vdots \\ AV_n = e_n \end{cases} \xrightarrow[\text{de Gauss}]{\text{élimination}} \begin{cases} \tilde{A}V_1 = \tilde{e}_1 \\ \tilde{A}V_2 = \tilde{e}_2 \\ \vdots \\ \tilde{A}V_n = \tilde{e}_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{cases}$$

II.3 Méthode de Gauss-Jordan :

La méthode de Gauss-Jordan est identique à la méthode de Gauss. Elle consiste à transformer la matrice A en une matrice d'identité I , donc ici les transformations s'appliquent aussi à la partie supérieure de la matrice :

$$[A : b] \xrightarrow[\text{G-J}]{\text{Transf}} [I : b']$$

dont b' est la solution du syst.

Preons un exemple d'un syst de dimension 3×3 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{array} \right] = JA^{(0)}$$

Etape (1) :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow L_2 - 3L_1 \\ \rightarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \end{array} \right]$$

* $a_{11}^{(0)} \neq 0 \Rightarrow a_{11}^{(0)}$ est le pivot de la première ligne

* Diviser la première ligne par $a_{11}^{(0)} = 2$ pour avoir un pivot $\boxed{1}$

* puis Annuler les termes sous le pivot 1

Etape (2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{1/2} & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -6 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & -7 & -5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ \leftarrow L_3 - 1L_2 \end{array}$$

* le pivot est maintenant $a_{22}^{(1)}$ ($a_{22}^{(1)} = 1 \neq 0$)

* Annuler les termes en dessous et en dessus du pivot 2.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

Étape ③

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \textcircled{4} & 7 \\ 0 & 1 & \textcircled{-6} & -4 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \leftarrow L_1 = L_1 - 4L_3 \\ \leftarrow L_2 = L_2 - (-6)L_3 \end{array} \right\}$$

$a_{33}^{(2)} = -1 \neq 0$

* diviser la dernière ligne par $a_{33}^{(2)} = -1$ pour avoir le pivot 3 = $\boxed{1}$

* annuler les termes en dessus de pivot 3

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Sigma \\ \underline{b} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} = \begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \Rightarrow x = \underline{b}$$

donc la solution du syst est : $x = [3 \ 2 \ 1]^t$

Remarques :

1/ A la fin de calculs il faut vérifier les résultats trouvés dans le système d'équations.

2/ La méthode de Gauss-Jordan est utilisée pour calculer l'inverse des matrices :

$$[A; I] \xrightarrow[GJ]{\text{Transf}} [I; A^{-1}]$$

$$\text{Exp: } \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[GJ]{\text{Transf}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right] A^{-1}$$

II.4/ Méthode de décomposition (LU)

Théorème :

Si A est une matrice carrée d'ordre n dont toutes les sous matrices principales sont régulières, alors il existe une décomposition unique de A sous la forme $A = LU$.

Où "L" est une matrice triangulaire inférieure avec une diagonale unitaire. "U" est une matrice triangulaire supérieure.

La résolution du système $Ax = b$ devient

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

La résolution du syst $Ax=b$ revient à la résolution des deux syst $Ly=b$ par un algorithme descendant (\downarrow) et $Ux=y$ par un algorithme ascendant (\uparrow). La résolution de ces deux syst est immédiat puisque les matrices L et U sont triangulaires.

La méthode = Exp.

Soit A une matrice dont toutes les sous matrices sont régulières :

$$\begin{bmatrix} \overset{\Delta_1}{1} & \overset{\Delta_2}{2} & \overset{\Delta_3}{1} \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

on a :

$$\Delta_1 = |1| = 1 \neq 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

$$\Delta_3 = \det(A) = 8 \neq 0$$

} \Rightarrow A admet une décomposition unique $A=LU$.

on pose :

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

par identification, on arrive à déterminer les éléments des deux matrices L et U .

$$\begin{cases} u_{11} = a_{11} \\ u_{12} = a_{12} \\ u_{13} = a_{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{11} = 1 \\ u_{12} = 2 \\ u_{13} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} l_{21} u_{11} = a_{21} \\ l_{21} u_{12} + u_{22} = a_{22} \\ l_{21} u_{13} + u_{23} = a_{23} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_{21} = 2 \\ u_{22} = -8 \\ u_{23} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{31} u_{11} = a_{31} \\ l_{31} u_{12} + l_{32} u_{22} = a_{32} \\ l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23} + u_{33} = a_{33} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_{31} = 1 \\ l_{32} = -1/2 \\ u_{33} = -1 \end{cases}$$

D'où $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

sinon en utilisant la méthode d'élimination de Gauss.

U : est obtenue par la méthode d'élimination de Gauss.

L : est obtenue en utilisant la relation :

$$L_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad i = k, \dots, n.$$

où k désigne les étapes de transformation dans la méthode de Gauss. $k = 1, \dots, n$

La résolution :

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad LUx = b \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Ly = b & \text{--- (1)} \\ Ux = y & \text{--- (2)} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\downarrow) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\uparrow) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases} \quad \text{d'où } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

II.3.1 / Calcul du déterminant $\det(A) :$

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L) \cdot \det(U) = 1 \det(U) = \prod_{i=1}^n u_{ii}$$

$$\det(A) = \det(U) = \prod_{i=1}^3 u_{ii} = 1 \cdot (-8) \cdot (-1) = 8.$$

II.3.2 / Calcul de A^{-1} par la méthode de décomposition "LU"

le calcul de A^{-1} par la méthode de décomposition "LU" est identique à celui de la méthode de Gauss.

$$AV_k = e_k \quad \Leftrightarrow \quad LU V_k = e_k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Ly_k = e_k \\ UV_k = y_k \end{cases} \quad k = 1, \dots, n$$

II.5/ Méthode de Cholesky

Soit A une matrice carrée d'ordre n tel que $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$

① Définition:

La matrice A est dite symétrique si elle coïncide avec sa transposée: $A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

② Théorème: La matrice A est définie positive si et seulement si tous ses mineurs: $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, ..., $\Delta_n = \det(A)$ sont strictement positifs.

Si les deux conditions ① et ② sont vérifiées, alors A est appelée Matrice Symétrique Définie Positive. (S.D.P).

Théorème de Cholesky:

Soit A une matrice carrée d'ordre n , non singulière et symétrique. Pour qu'il existe une matrice triangulaire inférieure " L ", de même dimension que A , telle que $A = L \cdot L^t$, il faut et il suffit que A soit une matrice définie positive.

Algorithme de décomposition:

Afin d'obtenir les éléments L_{ij} de la matrice L , on multiplie les matrices " L " et " L^t ", puis on identifie les coefficients respectifs dans l'égalité $A = L \cdot L^t$ pour obtenir les équations:

Exp: $A(3 \times 3)$.

$$\text{on a : } A = L \cdot L^t \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} L_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2 \right)^{1/2}, & i = 1, 2, \dots, n. \\ L_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} \right), & i = j+1, \dots, n \end{cases}$$

Résolution du système $Ax = b$:

$$Ax = b \Leftrightarrow LL^t x = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b & \text{--- (1)} \\ L^t x = y & \text{--- (2)} \end{cases}$$

II.S.11 Calcul du déterminant de A :

$$A = L \cdot L^t \Rightarrow \det(A) = \det(LL^t) = \det(L) \cdot \det(L^t)$$

$$= [\det(L)]^2 = \left(\prod_{i=1}^n L_{ii} \right)^2$$

FIN
}

CH 03:

RÉSOLUTION DES SYSTEMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES PAR LES METHODES ITERATIVES

III.1/ Définitions:

a./ Polynôme caractéristique (PC) d'une matrice:

Le PC d'une matrice "M" de dimension (n x n) est défini comme $P(\lambda) = \det(M - \lambda I)$ où I est la matrice identité de dimension (n x n), le polynôme est de degré n et possède n racines réelles ou complexes.

b./ Valeurs propres λ_i d'une matrice "M": elles sont définies comme les racines du polynôme caractéristique de "M", ($P(\lambda) = \det(M - \lambda I) = 0$).

c./ Rayon spectral d'une matrice "M": est défini par:
$$\rho(M) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$
 où $|\lambda_i|$ est le module complexe de λ .

d./ Matrice à diagonale strictement dominante = (DSD)

La matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite à DSD si et seulement si:
$$|m_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |m_{ij}|, \quad \forall i \text{ fixé.}$$

III.2/ Position du problème:

lorsque l'ordre n d'un système algébrique linéaire est très grand $n \geq 100$, la résolution du système par les méthodes directes (Gauss, LU, Cholesky, ...) devient assez compliquée. On fait appel aux méthodes dites itératives ou indirectes, sous réserve de convergence. Le principe de ces méthodes consiste à définir une suite de valeurs $(x^{(k)})$ convergentes vers la solution exacte (x) du système $Ax = b$.

Définition: Une méthode itérative de résolution du système $Ax = b$ consiste d'abord à passer au système $x = \alpha x + \beta$ (comme l'on déterminera) et sa solution est alors la limite de la suite définie par: $x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$, $x^{(0)}$ étant une approximation initiale.

III.3/ Méthode de Jacobi:

On suppose que les $a_{ii} \neq 0$, $\forall i = \overline{1, n}$ où $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.
 Considérons alors le système linéaire $Ax = b$ d'ordre n ci-après:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Explicitons l'élément diagonal de chaque ligne et réécrivons le système de la façon suivante:

$$\begin{cases} x_1 = 1/a_{11} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\ x_2 = 1/a_{22} (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \\ x_3 = 1/a_{33} (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) \end{cases}$$

Les x_i dans le membre droit des équations ne sont pas connus, mais supposons que $x^{(k)}$ est une approximation pour $x = A^{-1}b$, alors on peut imaginer d'obtenir une nouvelle approximation en calculant:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1/a_{11} (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = 1/a_{22} (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = 1/a_{33} (b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}) \end{cases}$$

Ceci définit l'itération de Jacobi qui est formalisée avec l'algorithme suivant:

Algorithme de la méthode: Pour un système de n équations à n inconnus :

$$\begin{cases} X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^t \text{ donné} \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \end{cases} \quad i = \overline{1, n}$$

$a_{ii} \neq 0$, sinon, on permute deux équations.

Critère d'arrêt :

En pratique, les itérations vont jusqu'à atteindre la précision ε donnée au préalable, qui se traduit par :

$$\max (|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|) \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}$$

La solution est alors : $X^{(k+1)} = [x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}]^t$.

Convergence de la méthode de Jacobi :

La méthode de Jacobi peut s'écrire sous forme matricielle, pour cela, nous décomposons la matrice A du système $Ax = b$ sous la forme : $A = D + L + U$.

où U et D et L sont définies comme :

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \quad \Delta = D \quad (D + L + U)x = b \quad \Delta = D \quad Dx + (L + U)x = b$$

$$\Rightarrow x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b.$$

On pose $J = -D^{-1}(L + U)$ et $C_J = D^{-1}b$, on obtient :

$$\boxed{x = Jx + C_J}$$

D'où la forme matricielle de l'algorithme de Jacobi :

$$x^{(k+1)} = J x^{(k)} + C_J$$

J : est appelée la matrice de Jacobi.

$$J = \begin{cases} J(i,j) = -a_{ij}/a_{ii} & \text{si } i \neq j \\ J(i,i) = 0 \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n}$$

$$C_J = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i = \overline{1, n}$$

Règle 1 : (cc) si la matrice A du système d'équation $Ax = b$ est à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi converge, et ce, quel que soit $x^{(0)}$.

Règle 2 : (cn) la méthode de Jacobi convergera ($\|x^{k+1} - x^k\| \rightarrow 0$) si le rayon spectral de la matrice " J " (noté $\rho(J)$) vérifie : $\rho(J) < 1$, et ce, quel que soit $x^{(0)}$.

Remarque : (cs) le calcul de $\rho(J)$ est très compliqué, il suffit alors de vérifier si $\|J\| < 1$, puisque $\rho(J) \leq \|J\|$.

III.4 / Méthode de Gauss - Seidel :

la méthode de Gauss - Seidel est une variante améliorée de la méthode de Jacobi. On reprend le calcul comme précédemment. Pour le système précédent par exemple, on choisit un ensemble de valeurs $x^{(0)} = [x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad x_3^{(0)}]^t$

Itération 1 :

on porte $x_2^{(0)}$ et $x_3^{(0)}$ dans la 1^{ère} équation et on obtient

$$x_1^{(1)} = 1/a_{11} (b_1 - a_{12} x_2^{(0)} - a_{13} x_3^{(0)})$$

c'est cette nouvelle valeur de $x_1^{(1)}$, et non pas $x_1^{(0)}$, qui est portée dans la 2^{ème} équation du système :

$$x_2^{(1)} = 1/a_{22} (b_2 - a_{21} x_1^{(1)} - a_{23} x_3^{(0)})$$

De même dans la 3^{ème} équation, on porte $x_1^{(1)}$ et $x_2^{(1)}$ et non $x_1^{(0)}$ et $x_2^{(0)}$, et on obtient :

$$x_3^{(1)} = 1/a_{33} (b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)})$$

alors on peut imaginer d'obtenir une nouvelle approximation en

calculant :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1/a_{11} (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = 1/a_{22} (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = 1/a_{33} (b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

Ceci assure une convergence bien plus rapide que la méthode de Jacobi.

Pour un système de n équations à n inconnus, on obtient l'algorithme suivant :

Algorithme de Gauss-Seidel :

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{donné} \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \end{cases} \quad i=1, \dots, n$$

$a_{ii} \neq 0$, sinon, on permute deux équations.

Critère d'arrêt :

On arrête les itérations lorsque : $\max (|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|) \leq \epsilon$,
la solution est alors : $x^{(k+1)} = [x_1^{(k+1)} \quad x_2^{(k+1)} \quad x_3^{(k+1)}]^t$.

Convergence de la méthode de Gauss-Seidel :

La méthode de Gauss-Seidel s'écrit sous forme matricielle :

$$Ax = b \Leftrightarrow (D+L+U)x = b \Leftrightarrow (D+L)x + Ux = b$$

$$\Leftrightarrow (D+L)x = -Ux + b$$

$$\Rightarrow x = -(D+L)^{-1}Ux + (D+L)^{-1}b \quad \text{formule de G-S}$$

on pose $G_S = -(D+L)^{-1}U$ et $C_{G_S} = (D+L)^{-1}b$, on obtient :

$$\boxed{x = G_S x + C_{G_S}}$$

D'où $x^{(k+1)} = G_S x^{(k)} + C_{G_S}$

* Tous les résultats de convergence pour la méthode de Jacob (J) restent valables pour la méthode Gauss-Seidel (Gs) (remplacez α par J ou par Gs).

* Regle 03: si la matrice A du système d'équations $Ax = b$ est symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss-Seid converge quel que soit $x^{(0)}$.

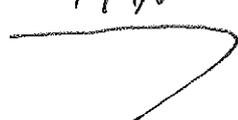
II.5/ Nombre d'itérations nécessaires:

On peut estimer le nombre k des itérations nécessaires pour obtenir la précision donnée ε :

M. Jacobi :
$$k \geq \log \left(\frac{1 - \|J\|}{\|C_J\|} \varepsilon \right) / \log (\|J\|)$$

M. Gauss-Seidel :
$$k \geq \log \left(\frac{1 - \|G_s\|}{\|C_{G_s}\|} \varepsilon \right) / \log (\|G_s\|)$$

Norme : $\ \cdot \ $	
d'un vecteur	d'une matrice
$\ v\ = \sum_{i=1}^n v_i $	$\ M\ _1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n m_{ij} \right)$
	$\ M\ _2 = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} ^2 \right) \right)^{1/2}$
	$\ M\ _3 = \ M\ _\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \right)$

FIN


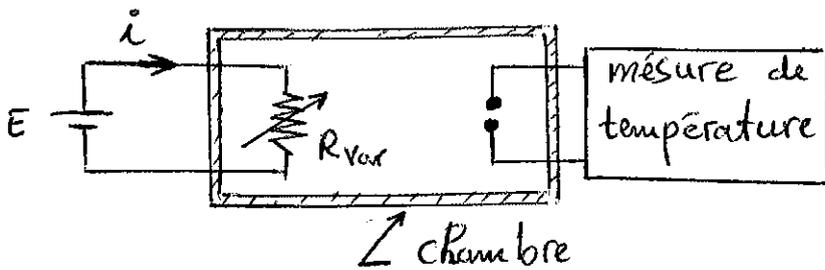
Interpolation Polynomiale

IV. 1/ Introduction:

En analyse numérique, l'interpolation polynomiale est une technique d'interpolation d'un ensemble de données ou d'une fonction par un polynôme. En d'autres termes, étant donné un ensemble de points (obtenus, par exemple, à la suite d'une expérience) on cherche un polynôme qui passe par tous ces points, et éventuellement vérifie d'autres conditions, de degré si possible le plus bas.

EXP:

* Soit une chambre à chauffer



$x_i = R_i$	0,5Ω	1,5	2	...
$y_i = \text{temp}$	10°C	15	20	...

les points d'interpolation (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, sont donnés au tableau.

Peut-on construire une approximation telle que $\text{temp} = f(x_i)$?

$\forall x_i \in [x_0, x_n]$..

* La façon la plus simple d'approcher une fonction est l'utilisation d'un polynôme d'interpolation :

le procédé est le suivant :

1. On choisit $n+1$ points distincts x_0, x_1, \dots, x_n
2. On calcule $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$... $y_n = f(x_n)$
3. On cherche un polynôme P_n de degré n tel que :

$$P_n(x_i) = y_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$= f(x_i)$$

IV.2/ Interpolation polynomiale:

* Polynôme: La façon la plus simple de représenter un poly "P" de degré inférieur ou égal à n est de l'exprimer dans la base canonique $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ Comme:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

IV.2.1/ Interpolation poly de "Lagrange":

Théorème:

* Soit $(n+1)$ points dans le plan (d'abscisses distincts).

$$(x_i, y_i) \quad , \quad i = \overline{0, n}$$

* Il existe un polynôme P_n de degré n et un seul, tel que:

$$P_n(x) = f(x_i) \quad \forall i = \overline{0, n}$$

Ce polynôme s'écrit: $P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$

avec: $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$ → (polynômes de Lagrange)

$$\text{tel que } L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

Le polynôme P_n s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f relativement aux points x_0, x_1, \dots, x_n .

EXO 01

On suppose que $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et que: $(x_0, y_0) = (0, 0)$
 $(x_1, y_1) = (1, 1)$ et $(x_2, y_2) = (8, 2)$

1- déterminer le polynôme $P_n(x)$ d'interpolation polynomiale qui passent par les points $(x_i, y_i)_{i=0,2}$

2- Calculer $P_2(x)$ et $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pour $x = 0.5, 0.95, 1, 1.5$, et 3.

Sol:

$n+1 = 3$ points $\Rightarrow n=2 \rightarrow$ degré de polynôme.

1/ d'après la méthode de Lagrange :

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^2 f(x_i) L_i(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x).$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \quad y_0 = 0 \Rightarrow y_0 L_0(x) = 0.$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 8)}{(1 - 0)(1 - 8)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(8 - 0)(8 - 1)}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 1 \frac{x(x-8)}{-7} + 2 \frac{x(x-1)}{56} = \boxed{-\frac{3}{28} x^2 + \frac{31}{28} x}$$

on a bien $P_2(0) = 0$, $P_2(1) = 1$ et $P_2(8) = 2$.

2/ Calcul de $P_2(x)$ et $f(x)$:

on a :

x	$f(x)$	$P_2(x)$
0,5	0,7937	0,52679
0,95	0,98305	0,95509
1	1	1
1,5	1,1447	1,4196
3	1,4422	2,3571

Remarque :

Pour obtenir une bonne précision, il faut augmenter le nombre de points d'interpolations.

IV.2.2 / Interpolation poly de Newton :

On étudie ici l'interpolation polynomiale de type Newton. Étant données une suite de $(n+1)$ points et une fonction f , on doit déterminer un polynôme P de degré n qui interpole f aux points considérés. On utilise pour cela la notion de différences divisées.

* Les polynômes e_k de la base de Newton sont définis comme suit :

$$\begin{cases} e_0 = 1 \\ e_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - \alpha_i) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{k-1}) \end{cases} \quad k = \overline{1, n}$$

en outre :

$$e_0 = 1$$

$$e_1 = (x - \alpha_0)$$

$$e_2 = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)$$

$$e_3 = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$

⋮

$$e_k = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{k-1})$$

L'ensemble des polynômes $(e_k)_{0 \leq k \leq n}$ (base de Newton) forment une base de l'espace \mathcal{P}_n des polynômes de degré au plus n .

* Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n relatif à la subdivision $\{(\alpha_0, y_0), (\alpha_1, y_1), \dots, (\alpha_n, y_n)\}$ s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k e_k(x)$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1(x - \alpha_0) + \alpha_2(x - \alpha_0)(x - \alpha_1) + \dots + \alpha_n(x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{n-1})$$

avec : $P_n(\alpha_i) = f(\alpha_i) \quad \forall i = \overline{0, n}$

Où les coefficients $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont les différences divisées, que l'on peut calculer à l'aide d'une formule de récurrence.

* La formule de récurrence qui définit les $(n+1)$ différences divisées de f est donnée par :

$$\begin{cases} \alpha_0 = f[\alpha_0] = f(x_0) & k=0 \\ \alpha_k = f[\alpha_0, \dots, \alpha_k] = \frac{f[\alpha_1, \dots, \alpha_k] - f[\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}]}{\alpha_k - \alpha_0} & k=1, \dots, n \end{cases}$$

$f[\alpha_0, \dots, \alpha_k]$ est alors appelée différences divisées d'ordre k .

En pratique lorsqu'on veut déterminer par exemple la différence divisée d'ordre 3, $f[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, on a besoins des quantités suivantes :

x	$f(x)$	Δf_1	Δf_2	Δf_3
α_0	$f[\alpha_0]$	—	—	—
α_1	$f[\alpha_1]$	$f[\alpha_0, \alpha_1]$	—	—
α_2	$f[\alpha_2]$	$f[\alpha_1, \alpha_2]$	$f[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$	—
α_3	$f[\alpha_3]$	$f[\alpha_2, \alpha_3]$	$f[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$	$f[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$

puisque :

$$f[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \frac{f[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] - f[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]}{\alpha_3 - \alpha_0}$$

EXO 02 :

1./ Construire le tableau des différences divisées associé aux points suivants :

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x)$	1,4	1,56	1,76	2,00	2,28

2./ Trouver le polynôme d'interpolation de Newton correspondant au tableau des différences calculé précédemment.

Sol:

1/ tableau des diff-div.

$$n+1 = 5 \Rightarrow n = 4.$$

- les $(n+1)$ différences divisées d'ordre 0 de $f(x)$ aux pts x_0, x_1, \dots, x_n sont : $f[x_i] = f(x_i) \quad i = \overline{0, n+1}$

- les $(n-p+1)$ diff-div d'ordre p de $f(x)$ aux pts x_0, x_1, \dots, x_n sont définies par:

$$\text{pour } p = \overline{1, n}$$

$$\text{pour } i = \overline{0, n-p}$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+p}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p-1}]}{x_{i+p} - x_i}$$

$$\underline{p=1} \quad i=0 \longrightarrow f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$i=1 \longrightarrow f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$$

⋮

$$i=3 \longrightarrow$$

$$\underline{p=2} \quad i=0 \longrightarrow f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$i=1 \longrightarrow f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

⋮

$$i=2.$$

$$\underline{p=3} \quad i=0 \longrightarrow f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

⋮

$$\underline{p=4}$$

⋮

x_i	$f(x_i)$	Δf_1 $P=1$ $i=0,3$	Δf_2 $P=2$ $i=0,2$	Δf_3 $P=3$ $i=0,1$	Δf_4 $P=4$ $i=0$
0,1	1,4	—	—	—	—
0,2	1,6	$\frac{1,6 - 1,4}{0,2 - 0,1} = 1,6$	—	—	—
0,3	1,76	$\frac{1,76 - 1,6}{0,3 - 0,2} = 2$	$\frac{2 - 1,6}{0,3 - 0,1} = 2$	—	—
0,4	2,00	$\frac{2 - 1,76}{0,4 - 0,3} = 2,4$	$\frac{2,4 - 2}{0,4 - 0,2} = 2$	$\frac{2 - 2}{0,4 - 0,1} = 0$	—
0,5	2,28	$\frac{2,28 - 2}{0,5 - 0,4} = 2,8$	$\frac{2,8 - 2,4}{0,5 - 0,3} = 2$	$\frac{2 - 2}{0,5 - 0,2} = 0$	$\frac{0 - 0}{0,5 - 0,1} = 0$

2./ le polynôme d'interpolation de Newton :

$$\begin{aligned}
 P_4(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
 &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
 &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\
 &= 1,4 + 1,6(x - x_0) + 2(x - x_0)(x - x_1) + 0 + 0
 \end{aligned}$$

$$P_4(x) = 1,4 + 1,6(x - 0,1) + 2(x - 0,1)(x - 0,2)$$

Fid

7