

## Chapitre 2 : Analyse du variogramme

### I. Introduction :

Lorsqu'on mesure une caractéristique en un point, on peut considérer la valeur obtenue comme la réalisation d'une variable aléatoire en ce point. Il en est de même pour tous les points d'un site donné. On a donc un grand nombre (ou une infinité) de variables aléatoires représentant conjointement un site. La géostatistique adopte ce point de vue et considère la distribution conjointe de toutes ces variables aléatoires.

La géostatistique utilise comme modèles de super-populations des fonctions aléatoires dont la structure d'auto-corrélation spatiale est résumée sous la forme de fonctions structurales. Ces fonctions structurales diffèrent selon la classe de la fonction aléatoire. Le variogramme utilisé comme outil géostatistique d'analyse de la corrélation spatiale.

### II. Définition :

Le variogramme est un temps appelé fonction de dispersion intrinsèque, il décrit directement la structure spatiale (contrairement à la covariance), indépendamment des moyennes et des problèmes posés par l'estimation de ces moyennes. Le modèle de la fonction aléatoire dite intrinsèque est précisément caractérisé par ce seul variogramme.

Les corrélations spatiales d'une fonction aléatoire intrinsèque sont caractérisées par la fonction de semi-variogramme qui définie comme :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}[Z(x + h) - Z(x)]$$

Comme on a supposé que la moyenne de  $Z(x + h) - Z(x)$  est nulle,  $\gamma(h)$  est juste la moitié de la valeur quadratique moyenne de la différence. C'est:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E[Z(x + h) - Z(x)]^2$$

Le variogramme est estimé par le variogramme expérimental  $\gamma^*(h)$ , qui est calculé à partir des données expérimentales :

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N [Z(x + h) - Z(x)]^2$$

ou  $N$  est le nombre de couples de données distantes de  $h$ .

Quand la covariance  $C(h) = E\{Z(x), Z(x + h)\} - m^2$ , existe alors :

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

- Il commence à 0 [pour  $h = 0$ ,  $Z(x + h) = Z(x)$ ]
- Il augmente généralement avec  $h$ .
- Il s'élève jusqu'à un certain niveau appelé le seuil, puis aplati dans certains cas pour créer un palier (Figure II.1.A). Dans d'autres cas, il pourrait même continuer à augmenter (Figure II.1.B). Lorsque le variogramme n'est pas borné, la moyenne et la variance ne sont pas définies : cela indique le plus souvent une tendance à grande échelle

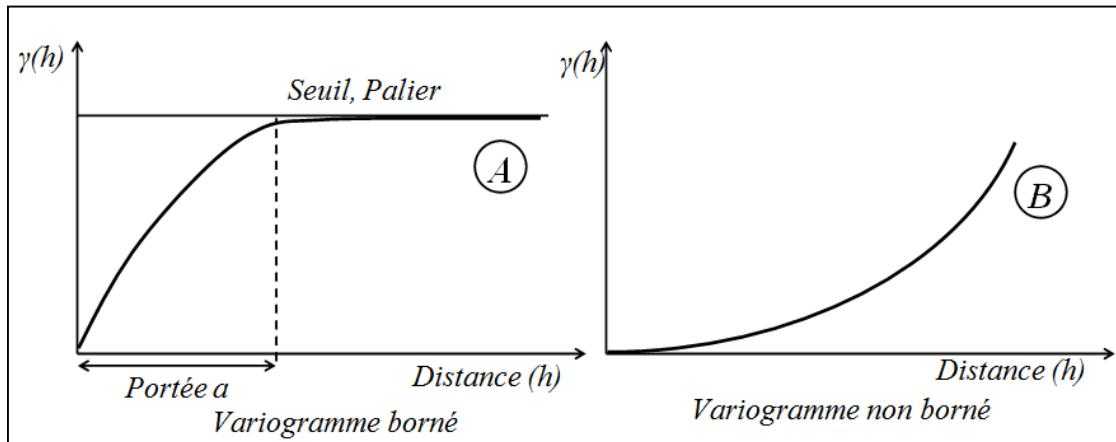


Figure 1. Exemple type d'un variogramme

### III. Propriété d'un Variogramme :

#### 1. Portée $a$ :

Dans la plupart des cas, le variogramme atteint un palier; les structures qui engendrent des variogrammes à palier sont parfois appelées phénomènes de transition. La distance à partir de laquelle le palier est atteint est appelée « portée du variogramme », elle est notée  $a$  (Figure II.1).

La portée correspond à la notion physique de la zone d'influence des échantillons :

- Pour les distances  $h < a$  les échantillons sont corrélés ;
- Pour  $h > a$  les échantillons ne le sont plus corrélés.

#### 2. Palier

Pour les variogrammes qui atteignent un palier pour  $h > a$ , on peut démontrer que ce palier  $\gamma(\infty)$  est la variance a priori de la fonction aléatoire  $Z(x)$ :

$$\gamma(\infty) = \text{Var}(Z(x)) = C(0)$$

Si la portée du variogramme est petite par rapport au domaine, de nombreux écarts auront une valeur proche du palier du variogramme: la variance expérimentale est alors pratiquement égale

au palier. Dans le cas contraire, de nombreux écarts sont inférieurs au palier du variogramme expérimental, la variance expérimentale est alors inférieure au palier.

$$\gamma(h) = \sigma^2 - C(h)$$

$C(h)$  est appelé le covariogramme de  $Z$ . Cette relation est importante et elle est continuellement utilisée pour les variogrammes avec palier.

### 3. Effet de pépite :

Lorsqu'aux petites distances pour  $h$  décroissant vers 0,  $\gamma(h)$  tend vers une valeur  $C_0$  non nulle, il y a une discontinuité apparente à l'origine, appelée « *effet de pépite* » (Figure II.2). Cette discontinuité peut avoir deux causes:

- Existence de microstructures, inaccessibles à l'échelle des observations
- Existence d'erreurs de mesures (erreurs d'analyse et d'échantillonnage).

Le cas extrême est l'effet de pépite pur : pour tout  $h$ ,  $\gamma(h) = C_0$  avec par définition  $\gamma(0)=0$ . Il caractérise alors une absence totale de corrélation entre échantillons.

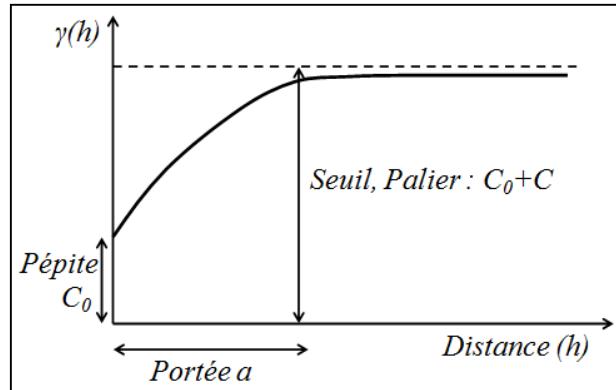


Figure 2. Schéma type d'un variogramme avec la présence de l'effet pépite.

### IV. Les variogrammes usuels :

La littérature géostatistique propose de nombreuses fonctions qui satisfont les propriétés du variogramme tel qu'il est présenté dans la Figure II.3. Ces fonctions paramétrées doivent permettre de décrire les différentes composantes (portée, palier, pépite). Elles doivent aussi gérer le comportement de la fonction à l'origine (tendance linéaire, tangence horizontale ou verticale).

Les modèles les plus courants sont:

$$\text{Effet de pépite: } \gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{Si } h = 0 \\ C_0 & \text{Si } h > 0 \end{cases} \quad \text{Figure 3. (a)}$$


---

$$\text{Sphérique: } \gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{Si } h = 0 \\ C_0 + C \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{h}{a} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{a} \right)^3 \right] & \text{Si } 0 < h \leq a \\ C_0 + C & \text{Si } h > a \end{cases} \quad \text{Figure 3. (b)}$$


---

$$\text{Exponentiel: } \gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{Si } h = 0 \\ C_0 + C \left[ 1 - \exp \left( - \left( \frac{h}{a} \right) \right) \right] & \text{Si } h > 0 \end{cases} \quad \text{Figure 3. (c)}$$


---

$$\text{Gaussien: } \gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{Si } h = 0 \\ C_0 & \text{Si } h > 0 \\ + C \left[ 1 - \exp \left( - \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right) \right] & \text{Si } h > 0 \end{cases} \quad \text{Figure 3. (d)}$$


---

$$\text{Puissance: } \gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{Si } h = 0 \\ C_0 + b h^p & \text{Si } h > 0, 0 < b < 2 \text{ (linéaire: } b=1) \end{cases} \quad \text{Figure 3. (e)}$$


---

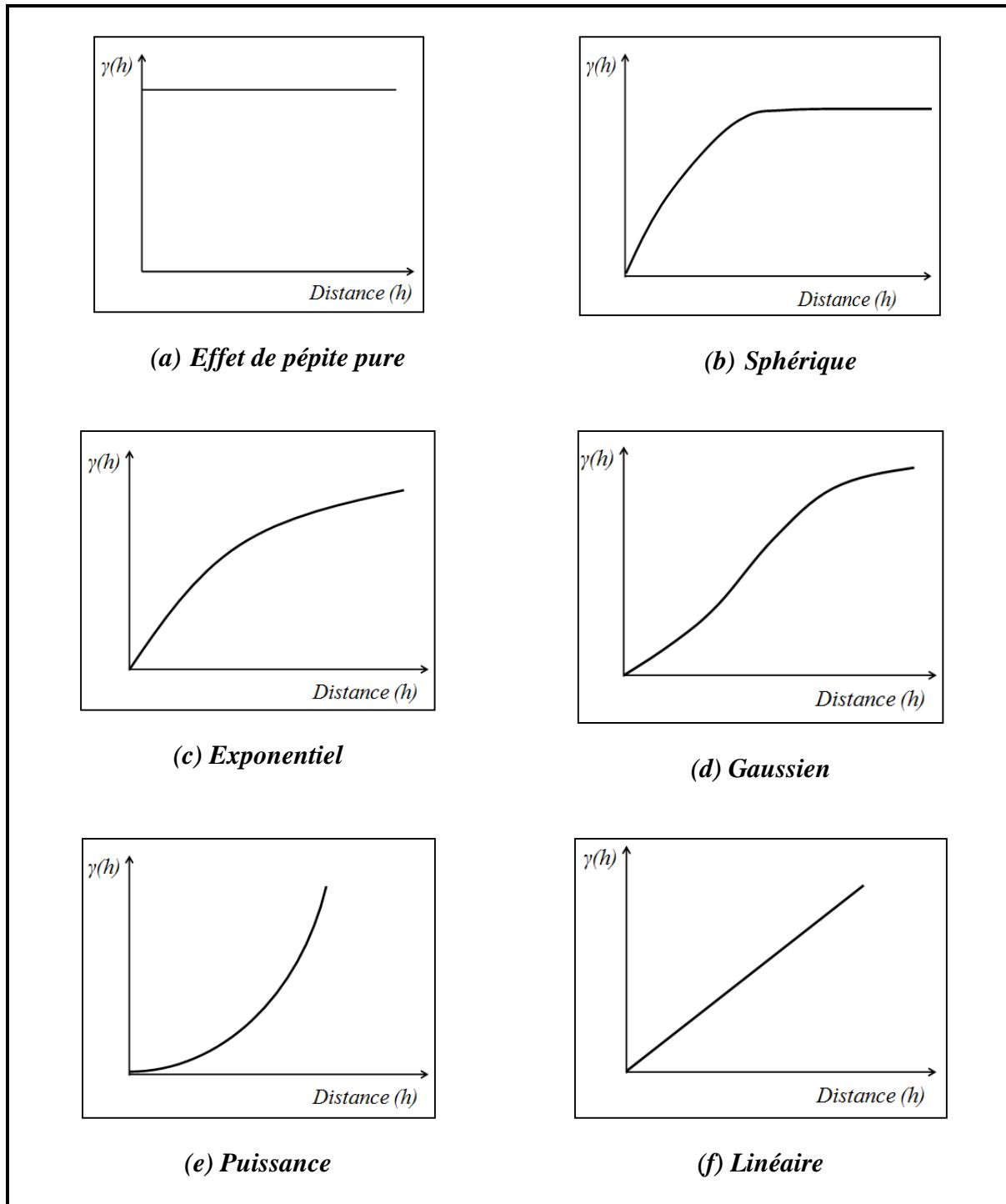


Figure. 3. Allure des variogrammes usuels.

On peut combiner plusieurs modèles en les additionnant. Ainsi, l'effet de pépite est presque toujours présent en association avec un ou plusieurs des autres modèles décrits plus haut. Il est important de noter que ces modèles ne sont pas les seuls que l'on peut utiliser, en réalité, il existe aussi un très grand nombre des modèles de variogramme.

Il y a un lien étroit entre la nature de la variable étudiée et le type de modèle que l'on est susceptible de rencontrer. Ainsi, le modèle gaussien exprime une très grande continuité typique

d'une variable comme la topographie, l'épaisseur d'une formation, le champ gravimétrique, la charge hydraulique. Ce modèle n'est pratiquement jamais rencontré pour des variables comme les propriétés mécaniques des roches, les analyses géochimiques en général. Pour ces variables, les modèles sphériques et exponentiels sont beaucoup plus courants. Pour des variables discrètes, le modèle gaussien est même à proscrire complètement.

## V. Les anisotropies

La continuité spatiale n'est pas nécessairement la même dans toutes les directions. Les variogrammes calculés le long ces directions seront donc distincts. Il existe deux types d'anisotropies :

### 1. Anisotropie géométrique :

Les variogrammes ont le même palier dans toutes les directions, mais des portées différentes d'une direction à l'autre. Une simple transformation linéaire des coordonnées permet alors de se ramener à un cas isotrope.

- Les portées maximales ( $a_g$ ) et minimales ( $a_p$ ) s'observent selon deux directions orthogonales.

Connaissant  $a_g$  et  $a_p$ , on peut trouver  $a_\theta$ , où  $\theta$  désigne l'angle mesuré par rapport à la direction où est rencontré  $a_g$ .

$$a_\theta = \frac{a_g a_p}{\sqrt{(a_p^2 \cos^2 \theta + a_g^2 \sin^2 \theta)}}$$

On peut ainsi évaluer  $\gamma(h, \theta)$  soit en utilisant  $a_\theta$ , soit en corrigeant la distance  $h$  pour tenir compte de l'anisotropie:

$$\gamma(h_\theta, \theta) = \gamma(h_g) \text{ suivant la portée } a_g$$

Avec,

$$h_g = \sqrt{(h_\theta \cos \theta)^2 + \left(\frac{a_g}{a_p} h_\theta \sin \theta\right)^2}$$

### 2. Anisotropie zonale :

Les variogrammes présentent des paliers et des portées différentes selon les directions le long desquelles ils sont calculés. L'anisotropie zonale peut être modélisée, par exemple, en utilisant des structures gigognes caractérisées par leurs propres variabilités et anisotropies.

Le traitement des anisotropies doit conduire en fin de compte à la définition d'un variogramme isotrope.