II.1 équation parabolique

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

II.2 Discrétisation de l'équation à l'intérieure du domaine (nœuds internes)

a. Schéma explicite

Pour chaque nœud interne du domaine, les termes de l'équation EDP sont remplacés par l'approche à droite pour la dérivée de l'ordre (1), et l'approche centrée pour la dérivée de l'ordre (2) en terme de (j), on obtient :

$$U(i, j+1) = \lambda U(i-1, j) + (1-2\lambda)U(i, j) + \lambda\, U(i+1, j) \qquad \text{(II.1)}$$

D'où ; $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

Remarque : *La condition de stabilité de ce schéma est ;* $0 < \lambda < 1/2$

b. Schéma implicite

De la même façon, la dérivée de l'ordre (2) est discrétisée par l'approche centrée, mais cette fois, en terme (j+1) :

$$U(i, j) = -\lambda U(i+1, j+1) + (1+2\lambda)U(i, j+1) - \lambda\, U(i-1, j+1) \qquad \text{(II.2)}$$

Remarque : *Contrairement au schéma explicite, la méthode implicite est inconditionnellement stable*

c. Schéma de Crank-Nicolson

La discrétisation de l'EDP ce fait par l'application des deux méthodes explicite et implicite au même temps, on obtient :

$$\begin{aligned} -\lambda U(i+1, j+1) + 2(1+\lambda)U(i, j+1) - \lambda\, U(i-1, j+1) \\ = \lambda U(i+1, j) + 2(1-\lambda)U(i, j) + \lambda\, U(i-1, j) \end{aligned} \qquad \text{(II.3)}$$

II.3 Discrétisation de l'EDP aux bords du domaine (conditions aux limites)

a. Si la condition est de type Dirichlet

La discrétisation est une continuité du domaine

b. Si la condition est de type de Newman et de Fourier (Cauchy) :

Conditions		Approche	Schéma explicite	Schéma implicite	Schéma Crack-Nicholson
Newman	à x=0	C	$U(0,j+1) = 2\lambda U(1,j) + (1-2\lambda) U(0,j) - 2\lambda \Delta x\, c$	$U(0,j) = -2\lambda U(1,j+1) + (1+2\lambda) \times U(0,j+1) + 2\lambda \Delta x\, c$	$-2\lambda U(1,j+1) + 2(1+\lambda) U(0,j+1) = 2\lambda U(1,j) + 2(1-\lambda) U(0,j) - 4\lambda \Delta x\, c$
		G	$U(0,j+1) = \lambda U(1,j) + (1-\lambda) U(0,j) - \lambda \Delta x\, c$	$U(0,j) = -\lambda U(1,j+1) + (1+\lambda) \times U(0,j+1) + \lambda \Delta x\, c$	$-\lambda U(1,j+1) + (2+\lambda) U(0,j+1) = \lambda U(1,j) + (2-\lambda) U(0,j) - 2\lambda \Delta x\, c$
	à x=L	C	$U(L,j+1) = 2\lambda U(L-1,j) + (1-2\lambda) U(L,j) + 2\lambda \Delta x\, c$	$U(L,j) = -2\lambda U(L-1,j+1) + (1-2\lambda) \times U(L,j+1) - 2\lambda \Delta x\, c$	$-2\lambda U(L-1,j+1) + 2(1+\lambda) U(L,j+1) = 2\lambda U(L-1,j) + 2(1-\lambda) U(L,j) + 4\lambda \Delta x c$
		D	$U(L,j+1) = \lambda U(L-1,j) + (1-\lambda) U(L,j) + \lambda \Delta x\, c$	$U(L,j) = -\lambda U(L-1,j+1) + (1+\lambda) \times U(L,j+1) - \lambda \Delta x\, c$	$-\lambda U(L-1,j+1) + (2+\lambda) U(L,j+1) = \lambda U(L-1,j) + (2-\lambda) U(L,j) + 2\lambda \Delta x\, c$
Fourier (Cauchy)	à x=0	C	$U(0,j+1) = 2\lambda U(1,j) + (1-2\lambda(1+\Delta x)) U(0,j)$	$U(0,j) = -2\lambda U(1,j+1) + (1+2\lambda(1+\Delta x)) \times U(0,j+1)$	$-2\lambda U(1,j+1) + (2+2\lambda(1+\Delta x)) U(0,j+1) = 2\lambda U(1,j) + (2-2\lambda(1+\Delta x)) U(0,j)$
		G	$U(0,j+1) = \lambda U(1,j) + (1-\lambda(1+\Delta x)) U(0,j)$	$U(0,j) = -\lambda U(1,j+1) + (1+\lambda(1+\Delta x)) \times U(0,j+1)$	$-\lambda U(1,j+1) + (2+\lambda(1+\Delta x)) U(0,j+1) = \lambda U(1,j) + (2-\lambda(1+\Delta x)) U(0,j)$
	à x=L	C	$U(L,j+1) = 2\lambda U(L-1,j) + (1-2\lambda(1-\Delta x)) U(L,j)$	$U(L,j) = -2\lambda U(L-1,j+1) + (1+2\lambda(1-\Delta x)) \times U(L,j+1)$	$-2\lambda U(L-1,j+1) + (2+2\lambda(1+\Delta x)) U(L,j+1) = 2\lambda U(L-1,j) + (2-2\lambda(1-\Delta x)) U(L,j)$
		D	$U(L,j+1) = \lambda U(L-1,j) + (1-\lambda(1-\Delta x)) U(L,j)$	$U(L,j) = -\lambda U(L-1,j+1) + (1+\lambda(1-\Delta x)) \times U(L,j+1)$	$-\lambda U(L-1,j+1) + (2+\lambda(1-\Delta x)) U(L,j+1) = \lambda U(L-1,j) + (2-\lambda(1-\Delta x)) U(L,j)$