# Résolution des EDP de type elliptique par les méthodes de différence finies

## IV.1 Discrétisation de l'équation elliptique (second ordre avec deux variables)

### IV.1 Discrétisation des nœuds internes de l'équation

L'équation aux dérivées partielles de type elliptique s'écrit comme suit ;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(IV.1)}$$

La discrétisation d'une E.D.P elliptique à l'aide des différences finies comporte les étapes suivantes ;

- ***Etape (1) ;*** On définit un maillage qui couvre le domaine et sa frontière.

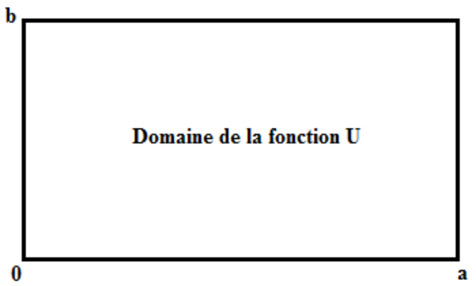



**Figure (IV.1) :** Domaine de la fonction U

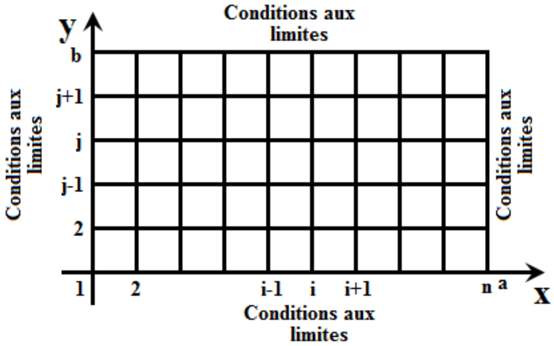



**Figure (IV.2) :** Maillage adapté sur le domaine

- ***Etape (2) ;*** On approche les dérivées partielles, à l'aide des différences finies ; ***approche centrée*** dans tous les nœuds internes du domaine :

$$\frac{U(i+1,j)-2U(i,j)+U(i-1,j)}{\Delta x^2} + \frac{U(1,j+1)-2U(i,j)+U(i,j-1)}{\Delta y^2} = 0 \qquad \text{(IV.2)}$$

Pour les colonnes internes (i =2,…n-1), et les lignes (j =2, ….m-1) ;

$$\lambda_y U(i,j-1) - 2(\lambda_y + \lambda_x)U(i,j) + \lambda_y U(i,j+1) = -\lambda_x U(i+1,j) - \lambda_x U(i-1,j) \qquad \text{(IV.3)}$$

D'où : $\lambda_x = \dfrac{1}{\Delta x^2}$, $\lambda_y = \dfrac{1}{\Delta y^2}$

- **Etape (3) ;** Discrétisation de l'équation sur les bords du domaine, dont on utilise les conditions aux limites pour éliminer les valeurs aux points de la frontière.

***a. Condition de type Dirichlet « grandeur imposée »***

La discrétisation est une extension sur les bords du maillage, donc la condition sera remplacée directement dans les équations précédentes

***b. Condition de type Newman « Flux imposé »***

- ***Condition de Newman à ( i =1, j =2,m-1) :*** $\Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = cst$

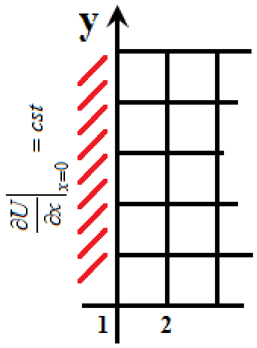



**Figure (IV.3) :** Condition de Newman à x=0

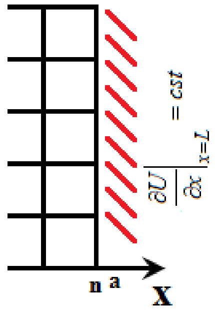



**Figure (IV.4) :** Condition de Newman à x=L

$$\lambda_y U(1, j-1) - 2(\lambda_y + \lambda_x)U(1, j) + \lambda_y U(1, j+1) = -\lambda_x U(2, j) - \lambda_x U(0, j) \qquad \text{(IV.4)}$$

Donc, on doit remplacer le terme de $U(0, j)$ par d'autre termes ;

- Soit par l'approche centrée de la condition donnée

$$à\,(x=0);\quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(x=0)} = \frac{U(2, j) - U(0, j)}{2\Delta x} = C \Rightarrow U(0, j) = U(2, j) - 2\Delta x\, C \qquad \text{(IV.5)}$$

On remplace le terme U(0,j) dans l'équation (IV.4) ;

$$\lambda_y U(1, j-1) - 2(\lambda_y + \lambda_x)U(1, j) + \lambda_y U(1, j+1) = -2\lambda_x U(2, j) + \frac{2C}{\Delta x} \qquad \text{(IV.6)}$$

- ***Condition de Newman à ( i =n, j =2,m-1) :*** $\Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=L} = cst$

$$\begin{aligned}\lambda_y U(n, j-1) - 2(\lambda_x + \lambda_y)U(n, j) + \lambda_y U(n, j+1) \\ = -\lambda_x U(n+1, j) - \lambda_x U(n-1, j)\end{aligned} \qquad \text{(IV.7)}$$

Donc, on doit remplacer le terme de $U(n+1, j)$ par d'autre termes ;

- Soit par l'approche centrée de la condition donnée

$$\begin{aligned}à\,(x=L);\quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(x=L)} = \frac{U(n+1, j) - U(n-1, j)}{2\Delta x} = C \\ \Rightarrow U(n+1, j) = U(n-1, j) - 2\Delta x\, C\end{aligned} \qquad \text{(IV.8)}$$

On remplace le terme $U(n+1, j)$ dans l'équation (IV.7) ;

$$\lambda_y U(n, j-1) - 2(\lambda_y + \lambda_x)U(n, j) + \lambda_y U(n, j+1) = -2\lambda_x U(n-1, j) - \frac{2C}{\Delta x} \quad \text{(IV.9)}$$

- ***Condition de Newman à ( i =2…n-1, j =1) :*** $\Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = cst$

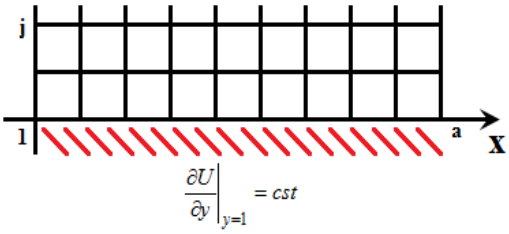



**Figure (IV.5) :** Condition de Newman à y =0

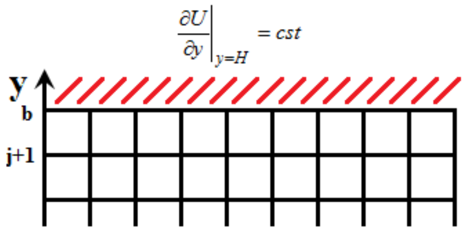



**Figure (IV.6) :** Condition de Newman à y =H

$$\lambda_y U(i,0) - 2(\lambda_x + \lambda_y)U(i,1) + \lambda_y U(i,2) = -\lambda_x U(i+1,1) - \lambda_x U(i-1,1) \quad \text{(IV.10)}$$

Donc, on doit remplacer le terme de $U(i,0)$ par d'autre termes ;

- Soit par l'approche centrée de la condition donnée

$$à\,(y=0);\quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{(y=0)} = \frac{U(i,2) - U(i,0)}{2\Delta y} = C \Rightarrow U(i,0) = U(i,2) - 2\Delta y\, C \quad \text{(IV.11)}$$

On remplace le terme $U(i,0)$ dans l'équation (IV.7) ;

$$\lambda_y U(i,2) - 2(\lambda_y + \lambda_x)U(i,1) = -\lambda_x U(i+1, j) - \lambda_x U(i-1, j) + \frac{2C}{\Delta y} \quad \text{(IV.12)}$$

- ***Condition de Newman à ( i =2…n-1, j =H) :*** $\Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=H} = cst$

$$\lambda_y U(i, H-1) - 2(\lambda_x + \lambda_y)U(i, H) + \lambda_y U(i, H+1) = -\lambda_x U(i+1, H) - \lambda_x U(i-1, H) \quad \text{(IV.13)}$$

Donc, on doit remplacer le terme de $U(i, H+1)$ par d'autre termes ;

- Soit par l'approche centrée de la condition donnée

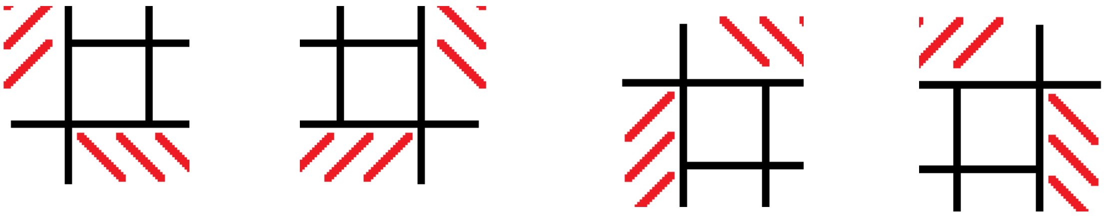
$$à\,(y=0);\quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{(y=0)} = \frac{U(i, H+1) - U(i, H-1)}{2\Delta y} = C \quad \text{(IV.14)}$$

$$\Rightarrow U(i, H+1) = U(i, H-1) + 2\Delta y\, C$$

On remplace le terme $U(i, H+1)$ dans l'équation (IV.7) ;

$$2\lambda_y U(i,H-1) - 2(\lambda_y + \lambda_x)U(i,H) = -\lambda_x U(i+1,H) - \lambda_x U(i-1,H) - \frac{2C}{\Delta y} \qquad \text{(IV.15)}$$

- ***Condition de Newman à ( i =1, j =1) :*** $\Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = cst$, $\Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = cst$



**(a)** **(b)** **(c)** **(d)**

**Figure (IV.7) :** Condition de Newman à ; ***(a)*** *x =0, y =0,* ***(b)*** *x =L, y =0,* ***(c)*** *x =0, y =H,* ***(d)*** *x =L, y =H*

$$\lambda_y U(1,0) - 2(\lambda_x + \lambda_y)U(1,1) + \lambda_y U(1,2) = -\lambda_x U(2,1) - \lambda_x U(0,1) \qquad \text{(IV.16)}$$

Donc, on doit remplacer les termes de $U(1,0)$, $U(0,1)$ par d'autre termes ;

- Soit par l'approche centrée de la condition donnée

$$\text{à}\,(x=0);\quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(x=0)} = \frac{U(2,1) - U(0,1)}{2\,\Delta x} = C_x \Rightarrow U(0,1) = U(2,1) - 2\Delta x\, C_x \qquad \text{(IV.17)}$$

$$\text{à}\,(y=0);\quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{(y=0)} = \frac{U(1,2) - U(1,0)}{2\,\Delta y} = C_y \Rightarrow U(1,0) = U(1,2) - 2\Delta y\, C_y \qquad \text{(IV.18)}$$

On remplace les termes $U(1,0)$, $U(0,1)$ dans l'équation (IV.7) ;

$$2\lambda_y U(1,2) - 2(\lambda_y + \lambda_x)U(1,1) = -2\lambda_x U(2,1) + \frac{2C_y}{\Delta y} + \frac{2C_x}{\Delta x} \qquad \text{(IV.19)}$$

- ***Condition de Newman à ( i =n, j =1) :*** $\Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=L} = cst$, $\Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = cst$

$$\lambda_y U(n,0) - 2(\lambda_x + \lambda_y)U(n,1) + \lambda_y U(n,2) = -\lambda_x U(n+1,1) - \lambda_x U(n-1,1) \qquad \text{(IV.20)}$$

Donc, on doit remplacer les termes de $U(n,0)$, $U(n+1,1)$ par d'autre termes ;

- Soit par l'approche centrée de la condition donnée

$$\text{à}\,(x=L);\quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(x=L)} = \frac{U(n+1,1) - U(n-1,1)}{2\,\Delta x} = C_x \qquad \text{(IV.21)}$$

$$\Rightarrow U(n+1,1) = U(n-1,1) + 2\Delta x\, C_x$$

$$\grave{a}\ (y=0);\quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{(y=0)} = \frac{U(n,2)-U(n,0)}{2\,\Delta y} = C_y \qquad \text{(IV.22)}$$

$$\Rightarrow U(n,0) = U(n,2) - 2\Delta y\, C_y$$

On remplace les termes $U(n+1,1)$, $U(n,0)$ dans l'équation (IV.7) ;

$$2\lambda_y U(n,2) - 2(\lambda_y+\lambda_x)U(n,1) = -2\lambda_x U(n-1,1) + \frac{2C_y}{\Delta y} - \frac{2C_x}{\Delta x} \qquad \text{(IV.23)}$$

- ***Condition de Newman à ( i =1, j =H) :*** $\Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = cst$ **,** $\Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=H} = cst$

$$\lambda_y U(1,H-1) - 2(\lambda_x+\lambda_y)U(1,H) + \lambda_y U(1,H+1)$$
$$= -\lambda_x U(2,H) - \lambda_x U(0,H) \qquad \text{(IV.24)}$$

Donc, on doit remplacer les termes de $U(1,H+1)$, $U(0,H)$ par d'autre termes ;

- Soit par l'approche centrée de la condition donnée

$$\grave{a}\ (x=0);\quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(x=0)} = \frac{U(2,H)-U(0,H)}{2\,\Delta x} = C_x \qquad \text{(IV.25)}$$

$$\Rightarrow U(0,H) = U(2,H) - 2\Delta x\, C_x$$

$$\grave{a}\ (y=0);\quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{(y=0)} = \frac{U(1,H+1)-U(1,H-1)}{2\,\Delta y} = C_y \qquad \text{(IV.26)}$$

$$\Rightarrow U(1,H+1) = U(1,H-1) + 2\Delta y\, C_y$$

On remplace les termes $U(0,H)$, $U(1,H+1)$ dans l'équation (IV.7) ;

$$2\lambda_y U(1,H-1) - 2(\lambda_y+\lambda_x)U(1,H) = -2\lambda_x U(2,H) - \frac{2C_y}{\Delta y} + \frac{2C_x}{\Delta x} \qquad \text{(IV.27)}$$

- ***Condition de Newman à ( i =n, j =H) :*** $\Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=n} = cst$ **,** $\Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=H} = cst$

$$\lambda_y U(n,H-1) - 2(\lambda_x+\lambda_y)U(n,H) + \lambda_y U(n,H+1) =$$
$$-\lambda_x U(n+1,H) - \lambda_x U(n-1,H) \qquad \text{(IV.28)}$$

Donc, on doit remplacer les termes de $U(n,H+1)$, $U(n+1,H)$ par d'autre termes ;

- Soit par l'approche centrée de la condition donnée

$$à\,(x=L);\quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(x=L)} = \frac{U(n+1,H)-U(n-1,H)}{2\,\Delta x} = C_x \qquad \text{(IV.29)}$$
$$\Rightarrow U(n+1,H) = U(n-1,H) + 2\Delta x\, C_x$$

$$à\,(y=H);\quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{(y=H)} = \frac{U(n,H+1)-U(n,H-1)}{2\,\Delta y} = C_y \qquad \text{(IV.30)}$$
$$\Rightarrow U(n,H+1) = U(n,H-1) + 2\Delta y\, C_y$$

On remplace les termes $U(n,H+1)$ , $U(n+1,H)$ dans l'équation (IV.7) ;

$$2\lambda_y U(n,H-1) - 2(\lambda_y+\lambda_x)U(n,H) = -2\lambda_x U(n-1,H) - \frac{2C_y}{\Delta y} - \frac{2C_x}{\Delta x} \qquad \text{(IV.31)}$$

## Remarque

Les valeurs de la fonction U sur les bords du domaine peuvent être approchées par d'autre approximations telles que ;

- ✓ *Approximation à l'ordre 1 de la première dérivée par la différence à droite (approche à droite) ;*

$$\frac{\partial U(i,j)}{\partial x} = \frac{U(i+1,j)-U(i,j)}{h}$$

- ✓ *Approximation à l'ordre 1 de la première dérivée par la différence à gauche (approche à gauche) ;*

$$\frac{\partial U(i,j)}{\partial x} = \frac{U(i,j)-U(i-1,j)}{h}$$

- ✓ *Approximation à l'ordre 2 de la première dérivée par les différences à droite (approche adroite) ;*

$$\frac{\partial U(i,j)}{\partial x} = \frac{-3U(i,j)+4U(i+1,j)-U(i+2,j)}{2h}$$

- ✓ *Approximation à l'ordre 2 de la première dérivée par les différences à gauche (approche gauche) ;*

$$\frac{\partial U(i,j)}{\partial x} = \frac{3U(i,j)-4U(i-1,j)+U(i-2,j)}{2h}$$

**c. *<u>Condition de type Cauchy</u> «*** $\frac{\partial U}{\partial x} = f(x,U)$ ***»***

La discrétisation de la fonction U sur les bords du domaine par la condition de Cauchy est de la même façon de la condition du Newman

d. **Etape (4) ;** **r**ésolution du système algébrique final par la méthode de DTMA « Algorithme de Thomas »

La discrétisation d'équation aux dérivées partielles elliptique par la méthode des différences finies vue précédemment mène pour ***chaque colonne*** un système de N équations linéaires algébriques à N inconnus de forme matricielle tri diagonale.

Exemple ; On suppose qu'on a un maillage de (5×5) montré dans la figure (IV.8), pour une condition au limite de type Dirichlet. Le système discrétisé pour chaque colonne est donné comme suit ;

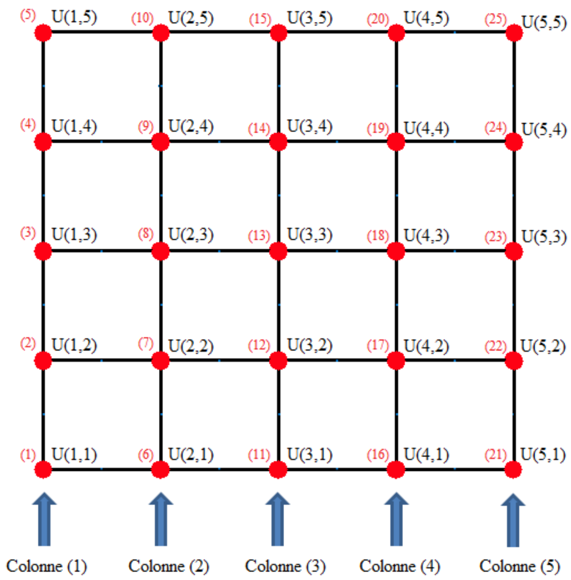



**Figure (IV.8) :** maillage de (5×5) nœuds

- ***Colonne (2) ;***

$$\begin{cases} -2(\lambda_x+\lambda_y)U(2,2)+\lambda_y U(2,3) = -\lambda_x U(3,2)-\lambda_x U(1,2)-\lambda_y U(2,1) \\ \lambda_y U(2,2)-2(\lambda_x+\lambda_y)U(2,3)+\lambda_y U(2,4) = -\lambda_x U(3,3)-\lambda_x U(1,3) \\ \lambda_y U(2,3)-2(\lambda_x+\lambda_y)U(2,4)+\lambda_y U(2,5) = -\lambda_x U(3,4)-\lambda_x U(1,4) \end{cases}$$

- ***Colonne (3) ;***

$$\begin{cases} -2(\lambda_x+\lambda_y)U(3,2)+\lambda_y U(3,3) = -\lambda_x U(4,2)-\lambda_x U(2,2)-\lambda_y U(3,1) \\ \lambda_y U(3,2)-2(\lambda_x+\lambda_y)U(3,3)+\lambda_y U(3,4) = -\lambda_x U(4,3)-\lambda_x U(2,3) \\ \lambda_y U(3,3)-2(\lambda_x+\lambda_y)U(3,4)+\lambda_y U(3,5) = -\lambda_x U(4,4)-\lambda_x U(2,4) \end{cases}$$

- ***Colonne (4) ;***

$$\begin{cases} -2(\lambda_x+\lambda_y)U(4,2)+\lambda_y U(4,3) = -\lambda_x U(5,2)-\lambda_x U(3,2)-\lambda_y U(4,1) \\ \lambda_y U(4,2)-2(\lambda_x+\lambda_y)U(4,3)+\lambda_y U(4,4) = -\lambda_x U(5,3)-\lambda_x U(3,3) \\ \lambda_y U(4,3)-2(\lambda_x+\lambda_y)U(4,4)+\lambda_y U(4,5) = -\lambda_x U(5,4)-\lambda_x U(3,4) \end{cases}$$

Pour résoudre le système décrit au-dessus par la méthode de DTMA adapté aux problèmes 2D, nous devons ;

***a- Réécrivant le système pour chaque colonne sous cette forme ;***

- ***<u>Colonne (2) ;</u>***

$$\begin{bmatrix} -2(\lambda_x+\lambda_y) & \lambda_y & 0 \\ \lambda_y & -2(\lambda_x+\lambda_y) & \lambda_y \\ 0 & \lambda_y & -2(\lambda_x+\lambda_y) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U(2,2) \\ U(2,3) \\ U(2,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_x U(3,2)-\lambda_x U(1,2)-\lambda_y U(2,1) \\ -\lambda_x U(3,3)-\lambda_x U(1,3) \\ -\lambda_x U(3,4)-\lambda_x U(1,4) \end{bmatrix}$$

***b- On pose ;*** $U(3,2), U(3,3), U(3,4) = 0$ ***(les éléments de la colonne suivante) donc la matrice devient ;***

$$\begin{bmatrix} -2(\lambda_x+\lambda_y) & \lambda_y & 0 \\ \lambda_y & -2(\lambda_x+\lambda_y) & \lambda_y \\ 0 & \lambda_y & -2(\lambda_x+\lambda_y) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U(2,2) \\ U(2,3) \\ U(2,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_x U(1,2)-\lambda_y U(2,1) \\ -\lambda_x U(1,3) \\ -\lambda_x U(1,4) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} A_1^{(0)} & B_1^{(0)} & 0 \\ C_1^{(0)} & A_2^{(0)} & B_2^{(0)} \\ 0 & C_2^{(0)} & A_3^{(0)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^{(0)} \\ g_2^{(0)} \\ g_3^{(0)} \end{bmatrix}$$

D'où ;

- $A_1^{(0)} = A_2^{(0)} = A_3^{(0)} = -2(\lambda_x+\lambda_y)$
- $B_1^{(0)} = B_2^{(0)} = \lambda_y$
- $C_1^{(0)} = C_2^{(0)} = A_3^{(0)} = -2(\lambda_x+\lambda_y)$
- $g_1^{(0)} = -\lambda_x U(1,2) - \lambda_y U(2,1)$, $g_2^{(0)} = -\lambda_x U(1,3)$, $g_3^{(0)} = -\lambda_x U(1,4)$
- $X_1 = U(2,2), X_2 = U(2,3), X_3 = U(2,4)$

***c- On résout cette matrice par la méthode de TDMA (vu dans le chapitre précèdent), en calculant les éléments ;*** $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, B_3^{(1)}, g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, g_3^{(1)}$***, puis les valeurs de la fonction U ;*** $U(2,2), U(2,3), U(2,4)$ ***en nœuds (7, 8, et 9)***

***d- Refaire la même opération dans la colonne (3) pour calculer les valeurs de la fonction U ;*** $U(3,2), U(3,3), U(3,4)$ ***en nœuds (12, 13, et 14)***

***e- Refaire la même opération dans la colonne (4) pour calculer les valeurs de la fonction U ;*** $U(4,2), U(4,3), U(4,4)$ ***en nœuds (17, 18, et 19)***