

Cours : Méthode des volumes finis

Sommaire

Chapitre I : « Généralités sur les équations aux dérivées partielles et le calcul de dynamique des fluides »

I.1 Introduction

I.1 Equations générale de transport (équation de continuité, de quantité de mouvement, et de l'énergie)

I.2 Les différents types de conditions aux limites

Chapitre II : « Méthode de volume finis »

II.1 Principe de la méthode

II.2 Maillage

II.3 Etude numérique de la conduction unidimensionnelle stationnaire

II.4 Problème convection-conduction unidimensionnel

II.5 Etude numérique de la conduction unidimensionnel instationnaire

II.6 Problème convection-conduction unidimensionnel instationnaire

II.7 Notion des schémas numériques

II.8 Etude numérique de la conduction en 2D stationnaire

II.9 Problème convection-conduction 2-D stationnaire

II.10 Etude numérique de la conduction en 2D instationnaire

II.11 Problème convection-conduction 2-D instationnaire

Chapitre IV : « Algorithme de solution (Algorithme Simpler) »

I.1 Introduction

La modélisation d'un problème réel utilise les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, acoustique, ect.), ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des équations simples, différentielles ordinaires ou partielles.

I.2 Rappel mathématique sur les EDP

En mathématique les EDP s'écrivent sous la forme générale suivante ;

$$f\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_n^n}\right) = 0 \quad (\text{I.1})$$

NB : il existe deux types des EDP ; linéaire et non linéaire

- Les EDP linéaires ; si elle est de la forme $L(y) = f(x)$

Exemple ; $L(x+y)=L(x)+L(y)$

Son concept mathématique intervient dans différents domaines, par exemple ;

- **Équation de Laplace ;**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{I.2})$$

- **Équation de propagation des ondes ;**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{I.3})$$

- **Équation de Fourier (équation de chaleur ou d'énergie) ;**

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (\text{I.4})$$

Les E.D.P. les plus intéressantes proviennent dans le domaine du mécanique des fluides et du transfert de chaleur tels que :

- Écoulement des fluides avec transfert de chaleur
- Ecoulements laminaires, turbulents et de transition
- Régimes subsoniques, transsoniques et supersoniques
- Transfert de chaleur conjuguée

I.3 Equation générale de transport

Puisque le domaine de mécanique des fluides et de transfert de chaleur font partie du même principe de conservation, il est utile et important de les généralisées sous forme d'une équation générale de transport dans laquelle les variables de quantité (φ), de coefficient de diffusion (Γ), et de source (S_φ) peuvent prendre plusieurs formes ;

$$\frac{\partial \rho\varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \varphi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \varphi)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \varphi)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + S_\varphi \quad (\text{I.5})$$

D'où :

- $\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$: Représente le terme transitoire
- $\frac{\partial}{\partial X}(U\Phi)$, $\frac{\partial}{\partial Y}(V\Phi)$, $\frac{\partial}{\partial Z}(W\Phi)$: Représentent les termes convectifs dans les directions X , Y , et Z .
- $\frac{\partial}{\partial X}\left(\Gamma \frac{\partial}{\partial X} \Phi\right)$, $\frac{\partial}{\partial Y}\left(\Gamma \frac{\partial}{\partial Y} \Phi\right)$, $\frac{\partial}{\partial Z}\left(\Gamma \frac{\partial}{\partial Z} \Phi\right)$: Représentent les termes diffusifs dans les directions X , Y , et Z
- S_φ : Représente le terme source.

Avec :

U , V , W : Composantes horizontale, verticale, et transversale de la vitesse.

Γ : Coefficient de diffusion.

En fonction de certaines hypothèses pour lesquelles l'équation générale du transport englobe principalement les lois fondamentales : de conservation de masse, de quantité de mouvement, et d'énergie tableau II.1 ;

Tableau_I.1 : Compatibilité des variables d'équation de transport (Φ , Γ , et S_Φ) avec les éléments d'équations de conservation de masse, de quantité de mouvement, et d'énergie

Equations	Φ	Γ	S_Φ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement (X)	U	μ	$S_x = F_x - \frac{\partial P}{\partial x}$ Forces de volume et de pression dans la direction x
Quantité de mouvement (Y)	V	μ	$S_y = F_y - \frac{\partial P}{\partial y}$ Forces de volume et de pression dans la direction y
Quantité de mouvement (Z)	W	μ	$S_z = F_z - \frac{\partial P}{\partial z}$ Forces de volume et de pression dans la direction z
Energie	T	$\frac{k}{C_p}$ ou $\frac{\lambda}{C_p}$	S_T

Remarque ;lorsqu'on remplace les variables d'équation de transport par les éléments d'énergie on ajoute le terme de la dissipation visqueuse dans l'équation($\mu\Phi$).

Toute simulation repose sur certaines hypothèses simplificatrices au problème étudié. En générale, elles sont énumérées comme suit :

- L'écoulement est Newtonien.
- Le fluide est visqueux.
- La dissipation visqueuse dans l'équation d'énergie est négligeable ($\mu\Phi = 0$).
- Les propriétés physiques de fluide et des composants électroniques (ρ , C_p , μ , k) sont supposées constantes.
- L'approximation de Boussinesq est prise en considération (fluide est quasiment incompressible partout, sauf au niveau du terme de gravité).

I.4 Type d'équation du transfert thermique

Par exemple dans le cas du transfert de chaleur par;

- Conduction pur unidimensionnelle stationnaire en cordonnées cartésiennes, l'équation du transport (d'énergie) devient alors ;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S_x = 0, \text{ ou} ; \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + S_x = 0 \quad (\text{I.6})^*$$

- Conduction pur unidimensionnelle instationnaire en cordonnées cartésiennes ;

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S_x, \text{ ou} ; \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + S_x \quad (\text{I.7})$$

- Conduction pur en bidimensionnelle stationnaire en cordonnées cartésiennes ;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S_{xy} = 0 \quad (\text{I.8})$$

- Conduction pur en bidimensionnelle instationnaire en cordonnées cartésiennes ;

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S_{xy} \quad (\text{I.9})^*$$

- Convection-Conduction unidimensionnelle stationnaire

$$\rho C_p \left(U \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S_x \quad (\text{I.10})^*$$

- Convection-Conduction unidimensionnelle instationnaire

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S_x \quad (\text{I.11})$$

- Convection-Conduction bidimensionnelle stationnaire

$$\rho C_p \left(U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S_{xy} \quad (\text{I.12})$$

- Convection-Conduction bidimensionnelle instationnaire

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S_{xy} \quad (\text{I.13})^*$$

I.5 Notion du calcul de dynamique des fluides (CFD)

En langage mathématique, la prédiction des grandeurs physiques du fluide (vitesse et température) ne peut pas être aboutit que par la résolution des équations citées précédemment, malheureusement, dans la plupart des cas, la nature complexe de ces équations non-linéaires augmente d'avantage la difficulté de leurs résolutions, qui les rendrait pratiquement impossible d'exhiber une solution. Dans ce cas, la résolution numérique s'impose, et le choix de la méthode doit être adéquat aux meilleures approximations.

Cette opération est incorporée dans Le calcul de dynamique des fluides (CFD), qui pourrait se traduire par Simulation Numérique de la Dynamique des Fluides. Pour simuler des phénomènes de transferts de chaleur et de masse, et autres phénomènes tels que les réactions chimiques. D'abord arrive à montrer que le problème est bien posé (c'est-à-dire qu'il admet une solution unique) et on peut, calculer des approximations numériques des solutions.

I.6 Avantages du calcul de dynamiques des fluides (CFD)

- ✓ Comparées aux essais expérimentaux, les méthodes numériques permettent de faire plus de simulations avec la possibilité de faire varier plus de paramètres et de configurations à moindre coût. Et même si les essais expérimentaux sont toujours nécessaires notamment pour valider les simulations numériques, la CFD a permis de réduire le nombre d'essais des nouveaux dispositifs. Elle est donc devenue un outil indispensable pour le développement de la recherche et de l'industrie.
- ✓ On utilise l'analyse de dynamique des fluides (CFD) afin d'effectuer une simulation rapide et efficace de l'écoulement des fluides et du transfert de chaleur.
- ✓ Simplifier l'analyse de l'écoulement
- ✓ En gagnant du temps et en réduisant les coûts de développement.
- NB :- le majeur inconvénient de CFD est la précision.

- En générale, les équations utilisées dans le domaine de dynamique de fluide sont de nature de dérivées partielles, sont alors discrétisés par une des méthodes suivantes en équations algébriques (linéaire) ;
 - ✓ Différences finies
 - ✓ Eléments finis
 - ✓ Volumes finis

II.1 Méthode des volumes finis

II.1.1 Principe de la méthode

Les méthodes numériques citées dans le chapitre précédent consistent à transformer ces équations différentielles en systèmes d'équations algébriques linéaires par une méthode de discréétisation appliquée sur le domaine de calcul avant de résoudre ce système par des méthodes directes ou par itérations.

Donc, la méthode des volumes finis est fait partit des méthodes de discréétisation les plus fréquemment utilisées dans les problèmes d'écoulements et de transferts thermiques, cette dernière, intègre l'équation aux dérivées partielles (EDP) sur un volume fini « appelé volume de contrôle » délimité par les nœuds du maillage couvrant le domaine physique. Le résultat de la discréétisation d'une variable est une équation algébrique liant la valeur de cette variable aux valeurs des variables en voisnages (points adjacentes désignés ou repérés par les mailles). La discréétisation d'équation aux dérivées partielles (EDP) par cette méthode présente des avantages considérables du fait qu'elle est simple à coder. Qu'elle garantisse la conservation de masse et de quantité de mouvement dans chaque volume de contrôle et dans tout le domaine de calcul. Elle est applicable pour les géométries complexes. (Patankar [1]).

II.2 Etapes de la méthode des volumes finis

La technique doit respecter les tâches suivantes en ordre ;

II.2.1 Description du domaine de calcul

Détermination du domaine de calcul par l'adaptation des hypothèses sur l'équation de dérivée partielle

II.2.2 Choix du maillage

Les intervalles de l'intégral de l'équation aux dérivées partielles sont obtenus par la subdivision du domaine de calcul sur des petits volumes de contrôle attachées dit « *Maillage* » de telle façon qu'il soit entièrement recouvert par des nœuds qui stockent les grandeurs scalaires ou vectorielles de l'équation aux dérivées partielles figure (II.1). Chaque volume de

contrôle de dimension ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$) est délimité par les faces (e, w, n, s, f, b). La projection des grandeurs scalaires (P, T) ou vectoriels (U, V, et W) sont stockées au centre de chaque volume de contrôle repéré par le point P dans la figure (II.2-6), les points E, W, N, S, F, B représentent les centres des volumes de contrôle en voisinage du point P, sont situés respectivement à l'Est, Ouest, Nord, Sud, Amont, et Aval du point P en 3D, [1].

NB : il existe deux types de maillage :

- Uniforme ; dimension de volume de contrôle est constant à travers le maillage
- non uniforme ; dimensions de volume de contrôle varie à travers le maillage

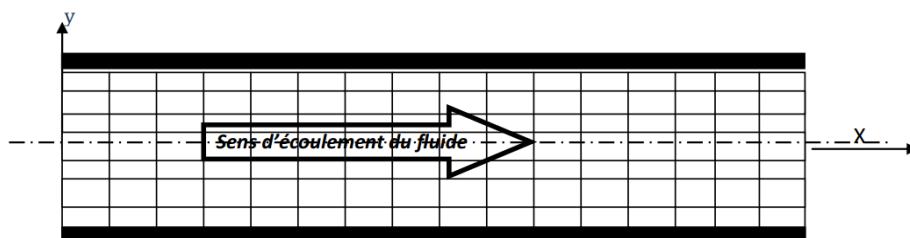


Figure (II.1) : Maillage sur le domaine de calcul

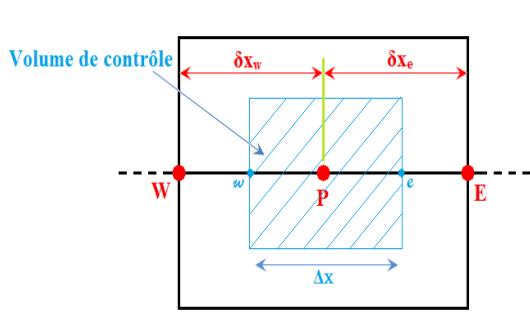


Figure (II.2) : Volume de contrôle
Unidimensionnelle en coordonnées cartésiennes

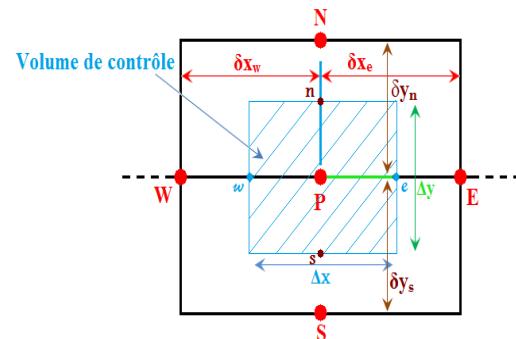


Figure (II.3) : Volume de contrôle
Bidimensionnelle en coordonnées cartésiennes

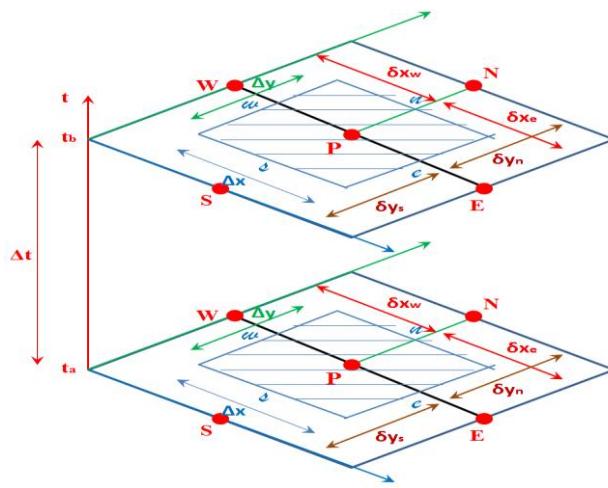


Figure (II.4) : Volume de contrôle Bidimensionnelle cas transitoire (en fonction du temps) en cordonnées cartésiennes

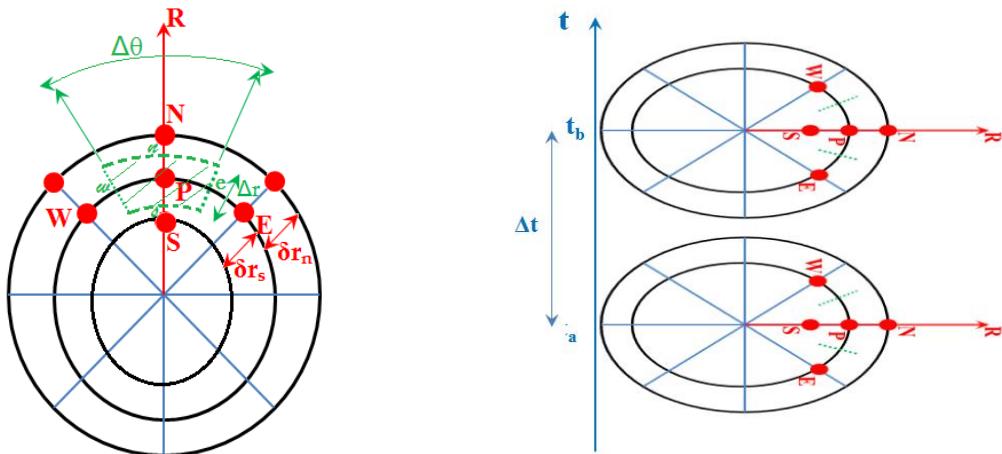


Figure (II.6) : Volume de contrôle bidimensionnelle en cordonnées cylindriques cas transitoire

Exemple :

En adaptant un maillage régulier de $n=6$ nœuds sur une barre de longueur $L=0.5$ m qui représente le domaine de calcul.

- Déterminer les dimensions de volume de contrôle (Δx) et la distance entre les nœuds (δx) pour le cas unidimensionnelle

Solution

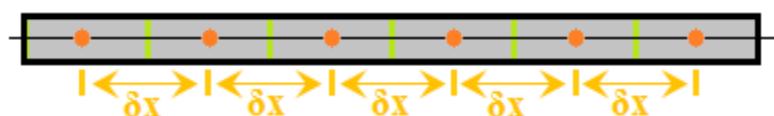


Figure (II.7) : schéma du maillage sur une barre

- La dimension de volume de contrôle est calculé par ;

$$\Delta x = \frac{L}{n-1} = \frac{0.5}{6-1} = 0.1 \text{ m}$$

- La distance entre les nœuds est calculé par ;

$$\delta x = \frac{\Delta x(i+1) + \Delta x(i)}{2} = \frac{0.1 + 0.1}{2} = 0.1 \text{ m}$$

II.2.3 Discrétisation de l'équation aux dérivées partielles (EDP) sur un volume de contrôle

Prenant l'intégration de l'équation générale du transport (II.1) comme un exemple de EDP sur le volume de contrôle typique de la variable Φ ;

$$\begin{aligned}
 & \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_b^f \int_s^n \int_w^e \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} dX dY dZ d\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_b^f \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial X} (U\Phi) dX dY dZ d\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_b^f \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial Y} (V\Phi) dX dY dZ d\tau \\
 & + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_b^f \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} (W\Phi) dX dY dZ d\tau \\
 & = \\
 & \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_b^f \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma \frac{\partial}{\partial X} \Phi \right) dX dY dZ d\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_b^f \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Gamma \frac{\partial}{\partial Y} \Phi \right) dX dY dZ d\tau \\
 & + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_b^f \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Gamma \frac{\partial}{\partial Z} \Phi \right) dX dY dZ d\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_b^f \int_s^n \int_w^e S_{\Phi} dX dY dZ d\tau
 \end{aligned} \tag{II.1}$$

Le résultat de l'intégration de l'équation (II.1) peut se mettre sous la forme algébrique générale suivante ;

$$a_p \Phi_P^{t+1} = a_E \Phi_E^{t+1} + a_W \Phi_W^{t+1} + a_N \Phi_N^{t+1} + a_S \Phi_S^{t+1} + a_F \Phi_F^{t+1} + a_B \Phi_B^{t+1} + b \tag{II.2}$$

Avec les coefficients $a_E, a_W, a_N, a_S, a_F, a_B, a_p$ correspondants respectivement aux nœuds Est, Ouest, Nord, Sud, Amont, Aval, et au centre du volume de contrôle.

II.2.4 Incorporation les conditions initiales et aux limites appropriés

L'une des caractéristiques de la méthode de volume finis est qu'elle nécessite des conditions aux limites aux frontières du domaine étudié. Dont nous citons les plus reconnus :

a- Conditions de Dirichlet « Température imposée » ;

La valeur de la grandeur à déterminer est connue aux différentes limites (frontières) de la géométrie du domaine d'étude. Cette condition aux limites est facile à programmé, par contre il est difficile de maintenir toute la surface à une valeur constante fixe au laboratoire ($\varphi(x=0) = \varphi_1$), ($\varphi(x=L) = \varphi_2$).

NB : La valeur de la grandeur peut être distribuée d'une manière linéaire et constante sur le long de la limite, par exemple ;

$$\varphi(x=0) = \varphi_1 + f(y), \text{ d'où } f(y) = z - y, \text{ avec } 0 \leq y \leq z \quad (\text{II.3})$$

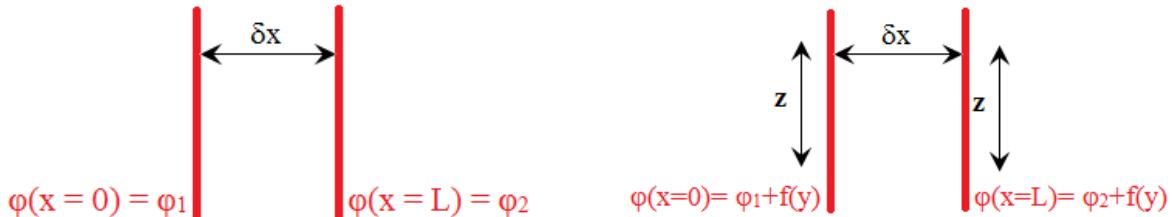


Figure (II.8) : Conditions aux limites de type Dirichlet

b- Condition de Neumann « Flux imposé » ;

Dans une équation différentielle, la dérivée de la variable spécifie de cette équation sur la limite d'un intervalle est une constante, exprimé par ;

$$\frac{d\varphi_{(x=0)}}{dx} = \alpha, \text{ et } \frac{d\varphi_{(x=L)}}{dx} = \beta, \text{ ou } (\alpha, \beta) = \text{Cst} \quad (\text{II.4})$$

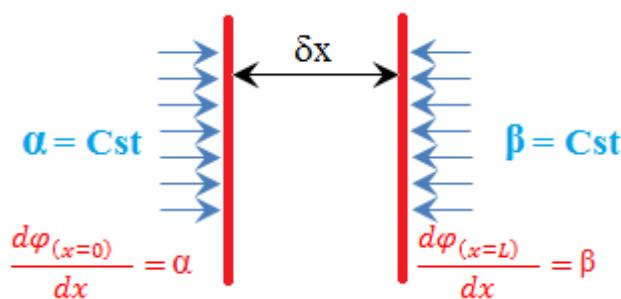


Figure (II.9) : Conditions aux limites de type Neumann

Exemple :

Dans le cas du transfert de chaleur, à la limite de la paroi, le terme diffusif représenté par la dérivée de température égale à la densité du flux imposé qui est constant,

donc la condition de Neumann s'écrit ; $-\lambda \frac{\partial T_{(x=0)}}{\partial x} = Q_1$, et $-\lambda \frac{\partial T_{(x=L)}}{\partial x} = Q_2$

NB :

- ✓ Cette condition est très facile à mettre en œuvre au laboratoire
- ✓ lorsque la paroi est isolée le flux dans ce cas est nul, et la condition devient ;

$$\frac{\partial T_{(x=0)}}{\partial x} = 0, \text{ et } \frac{\partial T_{(x=L)}}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.5})$$

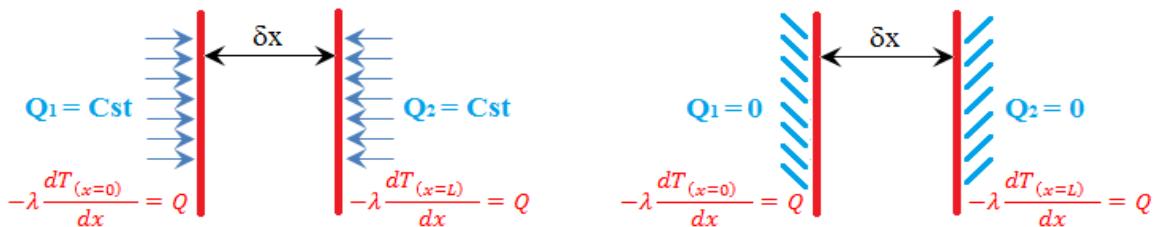


Figure (II.10) : Condition de Neumann sur le transfert de chaleur cas du flux imposé

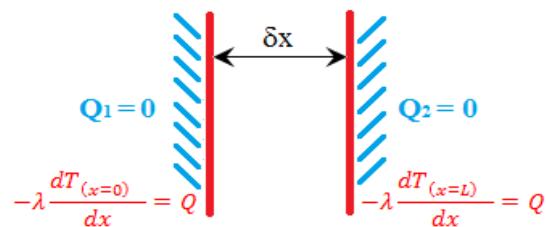


Figure (II.11) : Condition de Neumann sur le transfert de chaleur cas paroi isolée

c- Condition de Cauchy « condition de limite de type de 3 » ;

La condition aux limites est une combinaison pondérée d'une condition aux limites de Dirichlet et d'une condition aux limites de Neumann. Dont qu'elle s'écrit sous cette forme :

$$\varphi_{(x=0)} + \frac{d\varphi}{dx} = \alpha, \text{ et } \varphi_{(x=L)} + \frac{d\varphi}{dx} = \beta \quad (\text{II.6})$$

Exemple :

Dans le cas du transfert de chaleur, Lorsque les limites du domaine d'étude sont en contact avec un fluide en mouvement, la condition aux limites imposée dans ce cas est la continuité des flux convectif et diffusif à l'interface (frontière solide/fluide), donc l'équation est donnée comme suit :

$$Q_{Conv} = Q_{diffusif} \Rightarrow h_{Conv} \cdot (T_{x=0} - T_{\infty}) = -\lambda \frac{dT}{dx} \Rightarrow h_{Conv} \cdot (T_{x=0} - T_{\infty}) + \lambda \frac{dT}{dx} = 0 \quad (\text{II.7})$$

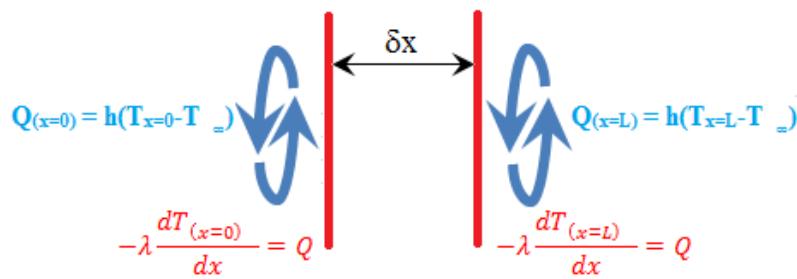


Figure (II.12) : Conditions aux limites de type Cauchy sur le transfert de chaleur

II.2.5 Discrétisation de l'équation aux dérivées partielles sur les bords du système étudié

La discrétisation de l'équation du système s'applique sur tous les points (nœuds) interne du domaine, mais pour les bords, il suffit de reprendre le même calcul en prenant uniquement un demi-volume de contrôle, et faisant introduire les conditions aux limites dans les éléments de l'équation du système discrétisé.

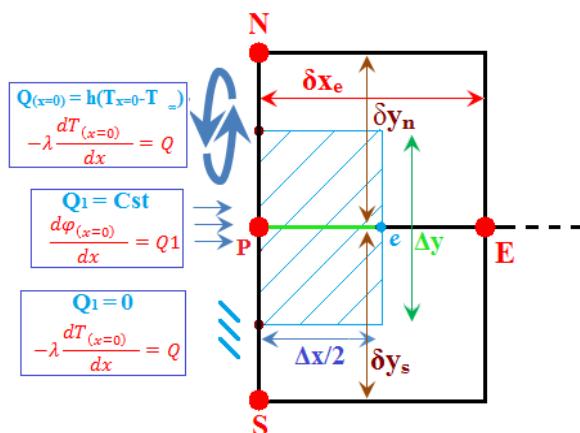


Figure (II.13) : Demi-volume de contrôle bidimensionnelle en coordonnées cartésiennes (limite gauche)

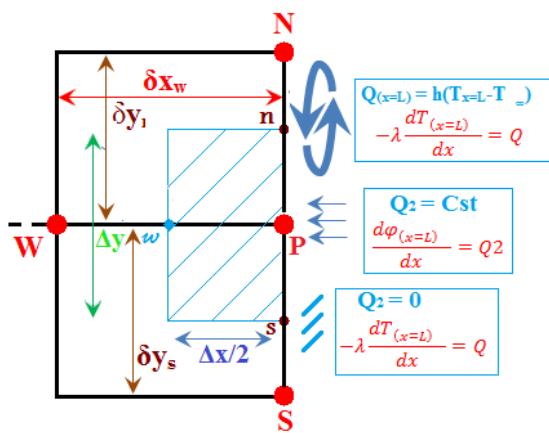


Figure (II.14) : Demi-volume de contrôle bidimensionnelle en coordonnées cartésiennes (limite droite)

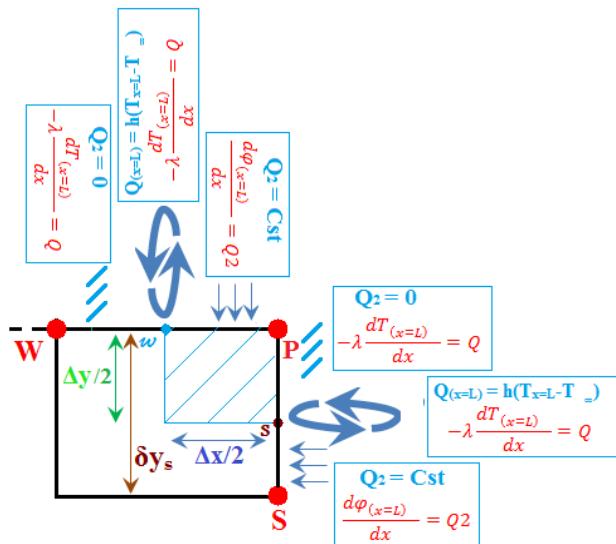


Figure (II.15) : Quart de volume de contrôle bidimensionnelle en coordonnées cartésiennes (limite haut à droite)

II.2.6 Résolution du système algébrique final par la méthode de DTMA « Algorithme de Thomas »

a) Principe de la méthode

La discréttisation des équations aux dérivées partielles par la méthode des volumes finis mène à un système des équations linéaires de forme matricielle tri diagonale, pour résoudre ce type de matrice nous appliquons la méthode numérique **TDMA** baptisé aussi par « *l'algorithme de Thomas* »

On suppose que le vecteur ($x_i \in R^4$) est la solution du système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = g_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = g_2 \\ a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + a_{34}X_4 = g_3 \\ a_{43}X_3 + a_{44}X_4 = g_4 \end{cases} \Rightarrow [A] \times [X] = [g] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

D'où :

- A ; est la matrice de 4×4

- X ; est le vecteur solution 4×1

- g ; est le vecteur résultat 4×1

➤ **Partie (1) :**

Dans la première partie, le système d'équation $[A] \times [x] = G$ sera convertie à la forme $[M] \times [x] = F$. Initialement, le système d'équation ressemble à:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & 0 & 0 \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & 0 \\ 0 & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & a_{34}^{(0)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(0)} & a_{44}^{(0)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^{(0)} \\ g_2^{(0)} \\ g_3^{(0)} \\ g_4^{(0)} \end{bmatrix}$$

- **Etape (1) :**

La division de la 1^{ère} ligne sur $a_{11}^{(0)}$;

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}^{(1)} = a_{11}^{(0)} / a_{11}^{(0)} = 1 \\ a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(0)} / a_{11}^{(0)} \\ f_1^{(1)} = g_1^{(0)} / a_{11}^{(0)} \end{array} \right\} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & 0 \\ 0 & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & a_{34}^{(0)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(0)} & a_{44}^{(0)} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ g_2^{(0)} \\ g_3^{(0)} \\ g_4^{(0)} \end{bmatrix}$$

Généralisation :

Le calcul de la 1^{ère} étape se fait comme suit ;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{i,j}^{(1)} = \frac{a_{i,j}^{(0)}}{a_{i,i}^{(0)}} \\ f_i^{(1)} = \frac{g_i^{(0)}}{a_{i,i}^{(0)}} \end{array} \right., \quad \text{pour } \left\{ \begin{array}{l} i = 1 \\ j = i, i+1 \end{array} \right.$$

- Etape (2) :

Appliquant la loi suivante sur toute la ligne (2) pour éliminer le terme $a_{21}^{(0)}$;

$$\left. \begin{array}{l} a_{21}^{(1)} = \frac{a_{21}^{(0)} - [a_{11}^{(1)} \times a_{21}^{(0)}]}{a_{22}^{(0)} - [a_{12}^{(1)} \times a_{21}^{(0)}]} = 0 \\ a_{22}^{(1)} = \frac{a_{22}^{(0)} - [a_{12}^{(1)} \times a_{21}^{(0)}]}{a_{22}^{(0)} - [a_{12}^{(1)} \times a_{21}^{(0)}]} = 1 \\ a_{23}^{(1)} = \frac{a_{23}^{(0)} - [a_{13}^{(1)} \times a_{21}^{(0)}]}{a_{22}^{(0)} - [a_{12}^{(1)} \times a_{21}^{(0)}]} \\ f_2^{(1)} = \frac{g_2^{(0)} - [f_1^{(1)} \times a_{21}^{(0)}]}{a_{22}^{(0)} - [a_{12}^{(1)} \times a_{21}^{(0)}]} \end{array} \right\} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23}^{(1)} & 0 \\ 0 & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & a_{34}^{(0)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(0)} & a_{44}^{(0)} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ g_3^{(0)} \\ g_4^{(0)} \end{bmatrix}$$

- Etape (3) :

Appliquant la loi suivante sur toute la ligne (3) pour éliminer le terme $a_{32}^{(0)}$;

$$\left. \begin{array}{l} a_{32}^{(1)} = \frac{a_{32}^{(0)} - [a_{22}^{(1)} \times a_{32}^{(0)}]}{a_{33}^{(0)} - [a_{23}^{(1)} \times a_{32}^{(0)}]} = 0 \\ a_{33}^{(1)} = \frac{a_{33}^{(0)} - [a_{23}^{(1)} \times a_{32}^{(0)}]}{a_{33}^{(0)} - [a_{23}^{(1)} \times a_{32}^{(0)}]} = 1 \\ a_{34}^{(1)} = \frac{a_{34}^{(0)} - [a_{24}^{(1)} \times a_{32}^{(0)}]}{a_{33}^{(0)} - [a_{23}^{(1)} \times a_{32}^{(0)}]} \\ f_3^{(1)} = \frac{g_3^{(0)} - [f_2^{(1)} \times a_{32}^{(0)}]}{a_{33}^{(0)} - [a_{23}^{(1)} \times a_{32}^{(0)}]} \end{array} \right\} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(0)} & a_{44}^{(0)} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ f_3^{(1)} \\ g_4^{(0)} \end{bmatrix}$$

- **Etape (4) :**

Appliquant la loi suivante sur toute la ligne (4) pour éliminer le terme $a_{43}^{(0)}$;

$$\left. \begin{array}{l} a_{43}^{(1)} = \frac{a_{43}^{(0)} - [a_{33}^{(1)} \times a_{43}^{(0)}]}{a_{44}^{(0)} - [a_{34}^{(1)} \times a_{43}^{(0)}]} = 0 \\ a_{44}^{(1)} = \frac{a_{44}^{(0)} - [a_{34}^{(1)} \times a_{43}^{(0)}]}{a_{44}^{(0)} - [a_{34}^{(1)} \times a_{43}^{(0)}]} = 1 \\ f_4^{(1)} = \frac{g_4^{(0)} - [f_3^{(1)} \times a_{43}^{(0)}]}{a_{44}^{(0)} - [a_{34}^{(1)} \times a_{43}^{(0)}]} \end{array} \right\} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ f_3^{(1)} \\ f_4^{(1)} \end{bmatrix}$$

***Généralisation :**

Le calcul effectué dans les étapes de 1 à 4 peut se mettre sous la forme générale suivante ;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{i,j}^{(1)} = \frac{a_{i,j}^{(0)} - [a_{i-1,j}^{(1)} \times a_{i,i-1}^{(0)}]}{a_{i,i}^{(0)} - [a_{(i-1,i)}^{(1)} \times a_{i,i-1}^{(0)}]} \\ f_i^{(1)} = \frac{g_i^{(0)} - [f_{i-1}^{(1)} \times a_{i,j}^{(0)}]}{a_{i,i}^{(0)} - [a_{(i-1,i)}^{(1)} \times a_{i,i-1}^{(0)}]} \end{array} \right. , \text{pour } \left\{ \begin{array}{l} i = 2, \dots, n \\ j = i-1, \dots, i+1 \end{array} \right.$$

Partie II :

Maintenant il suffit de déterminer le vecteur solution x du système linéaire $[M] \times [x] = F$, dont nous commençons par la dernière ligne et nous avançons.

$$X_4 = f_4^{(1)}$$

$$X_3 = f_3^{(1)} - a_{34}^{(1)} X_4$$

$$X_2 = f_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} X_3$$

$$X_1 = f_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} X_2$$

***Généralisation :**

Le calcul s'effectue dans la partie (2) selon la loi suivante ;

$$X_i = f_i^{(1)} - P_i, \text{Pour } \left\{ \begin{array}{l} P_i = a_{i,i+1}^{(1)} \times X_{i+1} \text{ à } i = n-1, \dots, 1 \\ P_i = 0 \text{ à } i = n \end{array} \right.$$

b) Résumé de la méthode

Le système ressemble à :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & a_{34}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43}^{(0)} & a_{44}^{(0)} & a_{45}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54}^{(0)} & a_{55}^{(0)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^{(0)} \\ g_2^{(0)} \\ g_3^{(0)} \\ g_4^{(0)} \\ g_5^{(0)} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{45}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^{(1)} \\ g_2^{(1)} \\ g_3^{(1)} \\ g_4^{(1)} \\ g_5^{(1)} \end{bmatrix}$$

➤ Etape (1)

- ✓ Mettre tous les éléments diagonale de la matrice ($a_{(i,i)}^{(0)} = 1$ pour $i = 1, \dots, n$)
- ✓ Mettre tous les éléments de la matrice au-dessous de la diagonale $a_{(i,j)}^{(0)} = 0$ pour $j = 1, \dots, i - 1$
- ✓ Mettre tous les éléments de la matrice au-dessus de la diagonale $a_{(i,j)}^{(0)} = 0$ pour $\begin{cases} i = 1, \dots, (n-2) \\ j = (i+2), \dots, n \end{cases}$
- ✓ Division de la 1^{ère} ligne sur le pivot ($a_{11}^{(0)}$)

$$a_{12}^{(1)} = \frac{a_{12}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \Rightarrow a_{(i,i+1)}^{(1)} = \frac{a_{(i,i+1)}^{(0)}}{a_{(i,i)}^{(0)}} \quad \text{Pour } i = 1$$

$$g_1^{(1)} = \frac{g_1^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \Rightarrow g_{(i,1)}^{(1)} = \frac{g_{(i,1)}^{(0)}}{a_{(i,i)}^{(0)}} \quad \text{Pour } i = 1$$

➤ Etape (2)

- ✓ Calculer les éléments de la matrice $a_{(i,i+1)}^{(1)}$ Pour $i = 2, \dots, (n-1)$

$$\left. \begin{array}{l} a_{23}^{(1)} = \frac{-a_{23}^{(0)}}{a_{22}^{(0)} + (a_{12}^{(1)} \times a_{21}^{(0)})} \\ a_{34}^{(1)} = \frac{-a_{34}^{(0)}}{a_{33}^{(0)} + (a_{23}^{(1)} \times a_{32}^{(0)})} \\ a_{45}^{(1)} = \frac{-a_{45}^{(0)}}{a_{44}^{(0)} + (a_{34}^{(1)} \times a_{43}^{(0)})} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ a_{(i,i+1)}^{(1)} = \frac{-a_{(i,i+1)}^{(0)}}{a_{(i,i)}^{(0)} + (a_{(i-1,i)}^{(1)} \times a_{(i,i-1)}^{(0)})} \quad \text{Pour } i = 2, \dots, (n-1) \right.$$

✓ Calcul de $g_{(i,1)}^{(1)}$ Pour $i = 2, \dots, n$

$$\left. \begin{array}{l} g_2^{(1)} = \frac{g_2^{(0)} - (g_1^{(1)} \times a_{21}^{(0)})}{a_{22}^{(0)} + (a_{12}^{(1)} \times a_{21}^{(0)})} \\ g_3^{(1)} = \frac{g_3^{(0)} - (g_2^{(1)} \times a_{32}^{(0)})}{a_{33}^{(0)} + (a_{23}^{(1)} \times a_{32}^{(0)})} \\ g_4^{(1)} = \frac{g_4^{(0)} - (g_3^{(1)} \times a_{43}^{(0)})}{a_{44}^{(0)} + (a_{34}^{(1)} \times a_{43}^{(0)})} \\ g_5^{(1)} = \frac{g_5^{(0)} - (g_4^{(1)} \times a_{54}^{(0)})}{a_{55}^{(0)} + (a_{45}^{(1)} \times a_{54}^{(0)})} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ g_{(i,1)}^{(1)} = \frac{g_{(i,1)}^{(0)} - (g_{(i-1,1)}^{(1)} \times a_{(i,i-1)}^{(0)})}{a_{(i,i)}^{(0)} + (a_{(i-1,i)}^{(1)} \times a_{(i,i-1)}^{(0)})} \quad \text{Pour } i = 2, \dots, (n) \right.$$

➤ Etape (3)

✓ Calculer les éléments de vecteur solution X de façon décrémenté de (n à 1)

$$\left. \begin{array}{l} X_5 = g_5^{(1)} \\ X_4 = g_4^{(1)} - a_{45}^{(1)} \times X_5 \\ X_3 = g_3^{(1)} - a_{34}^{(1)} \times X_4 \\ X_2 = g_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} \times X_3 \\ X_1 = g_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} \times X_2 \end{array} \right\} \Rightarrow X_i = g_i^{(1)} - P_i, \text{ d'où} \left\{ \begin{array}{ll} P_i = a_{(i,i+1)}^{(1)} \times X_{(i,i+1)} & \text{Pour } i = (n-1), \dots, 1 \\ P_i = 0 & \text{Pour } i = n \end{array} \right.$$

III. Méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion

III.1 Domaine stationnaire unidimensionnel (1D)

Pour ce type de problème l'équation d'énergie s'écrit ;

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0$$

La discréétisation de cette équation sur le volume de contrôle des nœuds internes du maillage est donné comme suit ;

$$\begin{aligned}
 & \int_w^e \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) A dx + \int_w^e S A dx = 0 \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \lambda_e A_e \frac{dT}{dx} \Big|_e - \lambda_w A_w \frac{dT}{dx} \Big|_w + \bar{S} A \delta x = 0 \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x_e} - \lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x_w} + (S_C - S_P T_P) A \delta x = 0 \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \left(\frac{\lambda_e A_e}{\Delta x_e} \right) T_E - \left(\frac{\lambda_e A_e}{\Delta x_e} + \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x_w} \right) T_P + \left(\frac{\lambda_w A_w}{\Delta x_w} \right) T_W + (S_c - S_P T_P) A \delta x = 0 \\
 & \Leftrightarrow \\
 & a_w T_W - a_p T_P + a_e T_E + b = 0 \\
 & \left\{ \begin{array}{l} a_w = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x_w} \\ a_e = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x_e} \\ a_p = a_e + a_w + S_p A \delta x \\ b = S_c A \delta x \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Remarque

Si les conditions aux limites prisent en considération sont de type de Dirichlet, on néglige la discréétisation sur les bords du maillage, parce que les températures sont connues, il suffit donc, que de les remplacées dans l'équation algébrique linéaire obtenue.

Par contre si les conditions aux limites sont de type Neumann ou Cauchy, la discréétisation se fait en demi-volume de contrôle

Par exemple à l'extrémité droite du maillage ;

$$\int_w^p \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) A dx + \int_w^p S A dx = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lambda_p A_p \frac{dT}{dx} \Big|_p - \lambda_w A_w \frac{dT}{dx} \Big|_w + \bar{S} A \delta x = 0$$

a- Cas condition de Neumann $\left(\frac{dT}{dx} = \alpha \right);$

Généralement dans le domaine thermique la condition de Neumann se résume dans la loi de fourrier on à $\varphi = -\kappa A \frac{dT}{dx}$, dans le cas d'isolation thermique $\varphi = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = 0$

donc le terme ; $\lambda_p A_p \frac{dT}{dx} \Big|_p = 0$, et l'équation devient ;

$$\lambda_w A_w \frac{T_p - T_w}{\Delta x_w} + (S_c - S_p T_p) A \delta x = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\lambda_w A_w}{\Delta x_w} \right) T_p - \left(\frac{\lambda_w A_w}{\Delta x_w} \right) T_w + (S_c - S_p T_p) A \delta x = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-a_w T_w + a_p T_p + b = 0$$

D'où ;

$$\begin{cases} a_w = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x_w} \\ a_p = a_w - S_p A \delta x \\ b = S_c A \delta x \end{cases}$$

b- Cas condition de Cauchy $Q_{Conv} = Q_{diffusif} \Rightarrow h_{Cnv} \cdot (T_{x=0} - T_\infty) = -\lambda \frac{dT}{dx}$

Donc le terme ; $\lambda_p \frac{dT}{dx} \Big|_p = h_{Cnv} \cdot (T_p - T_\infty) = Q$, et l'équation devient ;

$$Q A - \lambda_w A_w \frac{dT}{dx} \Big|_w + \bar{S} A \delta x = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$QA - \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x_w} T_P + \left(\frac{\lambda_w A_w}{\Delta x_w} \right) T_W + (S_c - S_p T_p) A \delta x = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-a_p T_p + a_w T_W + b = 0$$

$$\begin{cases} a_w = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x_w} \\ a_p = a_w + S_p A \delta x \\ b = QA + S_c A \delta x \end{cases}$$

La discréétisation de l'équation sur les autres bords du maillage se fait de la même manière décrit au-dessus.

III.1.2 Exercices d'applications

Exercice (1)

On considère une plaque barre cylindrique, sans source de chaleur, ayant l'aire transversale $A=10^{-2} \text{ m}^2$ et la longueur $L=0.5\text{m}$. Les extrémités A et B de la barre sont maintenues aux températures constantes de 100°C et de 500°C respectivement.

Calculer la distribution de la température le long de la barre pour 6 points. On connaît la conductivité thermique $\lambda = 1000 \text{ W/mk}$

Solution

On a ;

- $\lambda = 1000 \text{ W/mk}$
- $L=0.5 \text{ m}$
- $A= 1 \text{ m}^2$
- $T_A= 100^\circ\text{C}$
- $T_B=500^\circ\text{C}$
- 6 nœuds de maillage

On prenant en considération les hypothèses suivantes ;

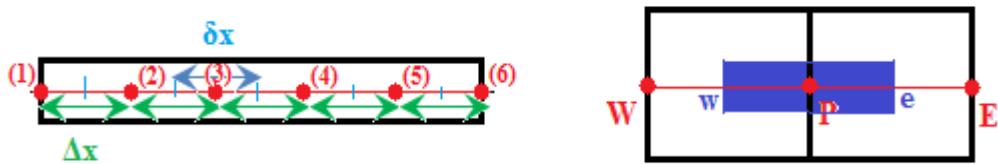
- La transmission de la chaleur se fait par conduction dans la barre

- La transmission de la chaleur se fait d'une manière constante dans le temps
- La transmission de la chaleur se fait dans un sens unique (1D)
- Pas de source de chaleur

Alors, l'équation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) = 0$$

1- Maillage



2- Calcul du pas Δx

$$\Delta x = \frac{L}{n-1} = \frac{0.5}{5} = 0.1 \text{ m}$$

3- Calcul de la longueur δx

$$\delta x = \frac{\Delta x_2 + \Delta x_1}{2} = \Delta x_1$$

4- Discrétisation de l'équation sur le volume de contrôle [w, e] pour les nœuds internes (2,3,4,5) du maillage est donné par ;

$$\begin{aligned} \int_w^e \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) A dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ A \lambda \frac{dT}{dx} \Big|_w^e &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ A_e \lambda_e \frac{dT}{dx} \Big|_e - A_w \lambda_w \frac{dT}{dx} \Big|_w &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\lambda_e A_e}{\Delta x_e} \right) T_E - \left(\frac{\lambda_e A_e}{\Delta x_e} + \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x_w} \right) T_P + \left(\frac{\lambda_w A_w}{\Delta x_w} \right) T_W = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_W T_W - a_P T_P + a_E T_E = 0$$

D'où ;

$$\begin{cases} a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x_e} = \frac{1000 \times 1}{0.1} = 10000 \\ a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x_w} = \frac{1000 \times 1}{0.1} = 10000 \\ a_P = a_E + a_W = 20000 \end{cases}$$

5- Discrétisation de l'équation sur un demi-volume de contrôle pour les nœuds situés aux bords du maillage (1),et (6) :

Pas de discrétisation puisque dans ce exemple nous avons des conditions aux limites de type de Dirichlet

6- Réassemblage des équations du système

$$\begin{aligned} \text{noeud (2); } & 10000T_3 - 20000T_2 + 10000T_A = 0 \\ \text{noeud (3); } & 10000T_4 - 20000T_3 + 10000T_2 = 0 \\ \text{noeud (4); } & 10000T_5 - 20000T_4 + 10000T_3 = 0 \\ \text{noeud (5); } & 10000T_B - 20000T_5 + 10000T_4 = 0 \\ & \Leftrightarrow \\ \text{noeud (2); } & -2T_2 + T_3 = -100 \\ \text{noeud (3); } & T_2 - 2T_3 + T_4 = 0 \\ \text{noeud (4); } & T_3 - 2T_4 + T_5 = 0 \\ \text{noeud (5); } & T_4 - 2T_5 = -500 \end{aligned}$$

7-Rrésolution du système matriciel par la méthode de TDMA

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ -500 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^{(1)} \\ g_2^{(1)} \\ g_3^{(1)} \\ g_4^{(1)} \end{bmatrix}$$

D'où ;

$$\begin{aligned} a_{12}^{(1)} &= \frac{-a_{12}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = 0.5 \\ a_{23}^{(1)} &= \frac{-a_{23}^{(0)}}{a_{22}^{(0)} + (a_{12}^{(1)} \times a_{21}^{(0)})} = 1/1.5 \\ a_{34}^{(1)} &= \frac{-a_{34}^{(0)}}{a_{33}^{(0)} + (a_{23}^{(1)} \times a_{32}^{(0)})} = 1.5/2 \\ g_1^{(1)} &= \frac{g_1^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = 50 \\ g_2^{(1)} &= \frac{g_2^{(0)} - (g_1^{(1)} \times a_{21}^{(0)})}{a_{22}^{(0)} + (a_{12}^{(1)} \times a_{21}^{(0)})} = 50/1.5 \\ g_3^{(1)} &= \frac{g_3^{(0)} - (g_2^{(1)} \times a_{32}^{(0)})}{a_{33}^{(0)} + (a_{23}^{(1)} \times a_{32}^{(0)})} = 25 \\ g_4^{(1)} &= \frac{g_4^{(0)} - (g_3^{(1)} \times a_{43}^{(0)})}{a_{44}^{(0)} + (a_{34}^{(1)} \times a_{43}^{(0)})} = 420 \end{aligned}$$

Donc, la solution est ;

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \\ 260 \\ 340 \\ 420 \end{bmatrix}$$

III.2 Domaine instationnaire en deux dimensions (2D)

Pour ce type de problème l'équation d'énergie s'écrit ;

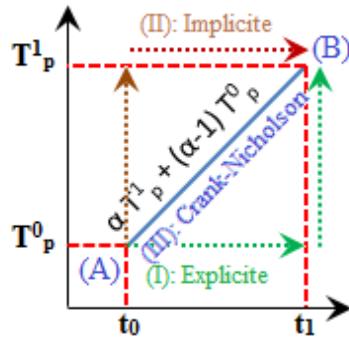
$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S$$

III1.2.1 La discréétisation de cette équation sur le volume de contrôle des nœuds internes du maillage est donné comme suit ;

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_w^e \int_s^n \rho C_p Z \frac{\partial T}{\partial t} dt dx dy &= \int_{t_0}^{t_1} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda Z \frac{\partial T}{\partial x} \right) dt dx dy + \int_{t_0}^{t_1} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda Z \frac{\partial T}{\partial y} \right) dt dx dy \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_w^e \int_s^n S Z dt dx dy \end{aligned}$$

- Pour le terme temporel ; On suppose que l'intégration de la température en fonction du temps se fait pour chaque point centrale (nœud P) du maillage.
- Pour les autres termes ; l'intégration en fonction du temps est donnée par la relation suivante ;

$$\int_{t_0}^{t_1} T_p dt = [\alpha T_p^1 + (\alpha - 1) T_p^0] \Delta t$$



L'interprétation de cette relation nous conduit à déterminer 3 schémas temporels :

- Schéma Explicite ($\alpha = 0$) $\Rightarrow T_p = T_p^{(0)}$; calculant T_p par $T_p^{(0)}$ en fonction du temps,
puis calculant $T_p^{(1)}$

- Schéma Implicite ($\alpha = 1$) $\Rightarrow T_p = T_p^{(1)}$; calculant T_p par $T_p^{(1)}$, puis $T_p^{(1)}$ en fonction du temps
- Schéma Crank-Nicholson ($\alpha = 0.5$) $\Rightarrow T_p = \frac{1}{2}T_p^{(1)} + \frac{1}{2}T_p^{(0)}$; calculant T_p par $T_p^{(1)}$, et $T_p^{(0)}$ en fonction du temps

III.2.2 Choix du schéma temporel

Dans ce qui suit on va choisir le schéma Implicite on obtient ;

$$\begin{aligned} \rho C_p Z \delta x \delta y (T_p^{(1)} - T_p^{(0)}) &= Z \delta y \Delta t \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right]_w^e + Z \delta x \Delta t \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right]_s^n + Z \delta x \delta y \Delta t \bar{S} \\ &\Leftrightarrow \\ \rho C_p Z \delta x \delta y (T_p^{(1)} - T_p^{(0)}) &= Z \delta y \Delta t \left[\lambda_e \left(\frac{T_E^{(1)} - T_P^{(1)}}{\Delta x_e} \right) \right] - Z \delta y \Delta t \left[\lambda_w \left(\frac{T_P^{(1)} - T_W^{(1)}}{\Delta x_w} \right) \right] \\ &\quad + Z \delta x \Delta t \left[\lambda_n \left(\frac{T_N^{(1)} - T_P^{(1)}}{\Delta y_n} \right) \right] - Z \delta x \Delta t \left[\lambda_s \left(\frac{T_P^{(1)} - T_S^{(1)}}{\Delta y_s} \right) \right] + Z \delta x \delta y \Delta t \bar{S} \end{aligned}$$

Remarque :

La source de chaleur linéaire se présente généralement sous 3 formes ;

- Forme (1) ; $S=0$ (absence de source de chaleur)
- Forme (2) ; $S=Q$ (lorsque on a une source de chaleur constante distribuée sur tout le domaine de calcul)
- Forme (3) ; $S=S_c - S_P T_P$

Donc, la discréttisation est donnée par cette relation ;

$$a_P T_P^{(1)} = a_W T_W^{(1)} + a_E T_E^{(1)} + a_N T_N^{(1)} + a_S T_S^{(1)} + B$$

avec;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_W = \frac{Z \delta y \lambda_w}{\Delta x_w}, a_E = \frac{Z \delta y \lambda_e}{\Delta x_e}, a_N = \frac{Z \delta x \lambda_n}{\Delta y_n}, a_S = \frac{Z \delta x \lambda_s}{\Delta y_s} \\ \\ ap = a_W + a_E + a_N + a_S + a_P^{(0)} + b' \\ \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho C_p Z \delta x \delta y}{\Delta t} \\ \\ b' = Z \delta x \delta y S_p \\ \\ B = Z \delta x \delta y S_C + a_P^{(0)} T_p^{(0)} \end{array} \right.$$

III.2.3 Résolution du système d'équation linéaire par la méthode directe de DTMA

Pour résoudre le système décrit au-dessus par la méthode de DTMA adapté aux problèmes 2D, nous devons ;

a- Réécrivant le système pour chaque colonne sous cette forme ;

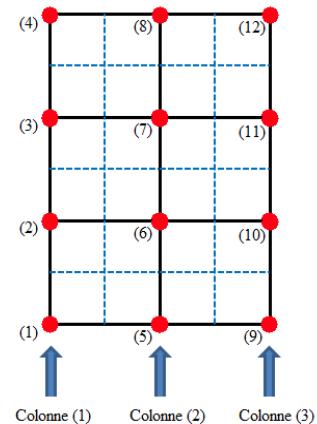
$$-a_N T_N^{(1)} + a_P T_P^{(1)} - a_S T_S^{(1)} = a_W T_W^{(1)} + a_E T_E^{(1)} + B$$

Exemple

Le système s'écrit comme suit ;

Colonne (1) ;

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_N T_2^{(1)} + a_P T_1^{(1)} = a_E T_5^{(1)} + B_1 \\ \\ -a_N T_3^{(1)} + a_P T_2^{(1)} - a_S T_1^{(1)} = a_E T_6^{(1)} + B_2 \\ \\ -a_N T_4^{(1)} + a_P T_3^{(1)} - a_S T_2^{(1)} = a_E T_7^{(1)} + B_3 \\ \\ a_P T_4^{(1)} - a_S T_3^{(1)} = a_E T_8^{(1)} + B_4 \end{array} \right.$$



↔

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_P & -a_N & 0 & 0 \\ -a_S & a_P & -a_N & 0 \\ 0 & -a_S & a_P & -a_N \\ 0 & 0 & -a_S & a_P \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1^{(1)} \\ T_2^{(1)} \\ T_3^{(1)} \\ T_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_E T_5^{(1)} + B_1 \\ a_E T_6^{(1)} + B_2 \\ a_E T_7^{(1)} + B_3 \\ a_E T_8^{(1)} + B_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} & 0 & 0 \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} & 0 \\ 0 & -a_{32} & a_{33} & -a_{34} \\ 0 & 0 & -a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1^{(1)} \\ T_2^{(1)} \\ T_3^{(1)} \\ T_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_E T_5^{(1)} + B_1 \\ a_E T_6^{(1)} + B_2 \\ a_E T_7^{(1)} + B_3 \\ a_E T_8^{(1)} + B_4 \end{bmatrix}$$

b- On pose ; $T_5^{(1)}, T_6^{(1)}, T_7^{(1)}, T_8^{(1)} = 0$, donc la matrice devient ;

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & -a_{12}^{(0)} & 0 & 0 \\ -a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & -a_{23}^{(0)} & 0 \\ 0 & -a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & -a_{34}^{(0)} \\ 0 & 0 & -a_{43}^{(0)} & a_{44}^{(0)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1^{(1)} \\ T_2^{(1)} \\ T_3^{(1)} \\ T_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^{(0)} \\ g_2^{(0)} \\ g_3^{(0)} \\ g_4^{(0)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -a_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_{23}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_{34}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1^{(1)} \\ T_2^{(1)} \\ T_3^{(1)} \\ T_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^{(1)} \\ g_2^{(1)} \\ g_3^{(1)} \\ g_4^{(1)} \end{bmatrix}$$

c- On résout cette matrice par la méthode de TDMA (vu dans le chapitre précédent), en calculant les éléments ; $a_{12}^{(1)}, a_{23}^{(1)}, a_{34}^{(1)}, g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, g_3^{(1)}, g_4^{(1)}$, puis les température en nœuds (1,2,3, et 4)

d- Refaire la même opération dans la colonne (2) pour calculer les températures en nœuds (5, 6,7, et 8)

5) Refaire la même opération dans la colonne (3) pour calculer les températures en nœuds (9, 10,11, et 12)

Exercice d'application

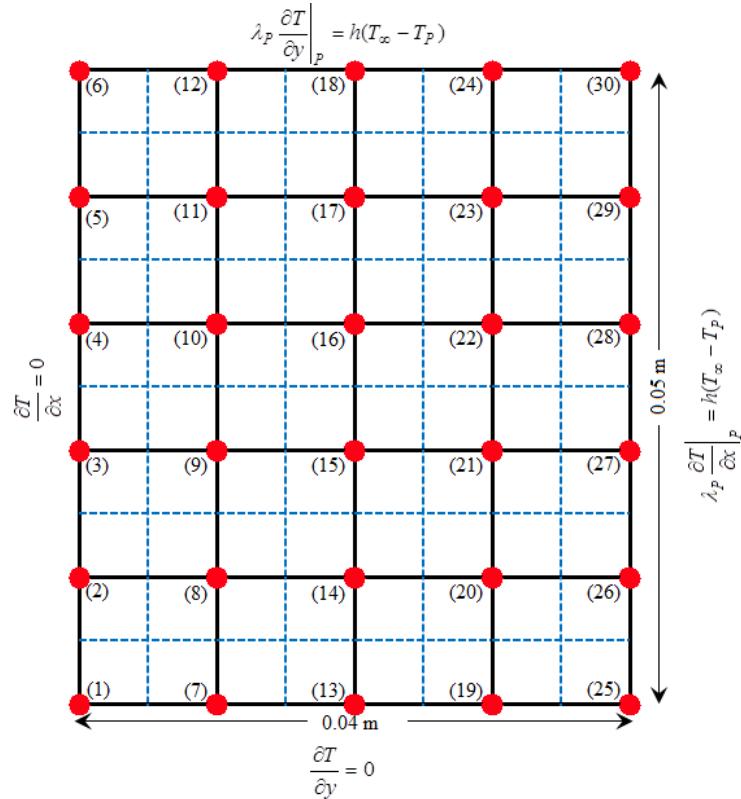
On considère une barre (voir figure) très longue ayant la section transversale rectangulaire (0.04×0.05) m². A l'instant t = 0 la section transversale, de la barre, a une distribution uniforme de la température, T₀= 25°C. Le coefficient de transfert thermique par convection sur la surface de séparation entre la barre et le fluide, est h=100 W/m² K.

1- Déterminer l'évolution dans le temps, de la distribution de la température sur la section transversale de la barre, en utilisant un pas de temps Δt= 0.1 s.

Sachant que les propriétés de la barre sont :

- La conductivité thermique, λ = 35 W/mk

- La densité de masse, $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$
- La chaleur spécifique, $C_p= 3500 \text{ J/Kg K}$



Solution

✓ Les données :

- $n_x = 5$, $n_y = 6$, (longueur) $L = 0.04 \text{ m}$, (largeur) $l = 0.05 \text{ m}$, (hauteur) $H = 1 \text{ m}$ (très longue).
- $h = 100 \text{ W/m}^2 \text{ K}$, $\Delta t = 0.1 \text{ s}$, $\lambda = 35 \text{ W/mk}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $C_p = 3500 \text{ J/Kg K}$

- Condition initial

$$A \quad t = 0 ; \quad T_0 = 425^\circ \text{C}$$

- Condition aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{à } x=0 ; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\ \text{à } x=L ; \quad \lambda_p \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_p = h (T_\infty - T) \end{array} \right. , \text{ et} \left\{ \begin{array}{l} \text{à } y=0 ; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ \text{à } y=l ; \quad \lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_p = h (T_\infty - T) \end{array} \right.$$

✓ **L'équation de chaleur gouvernante sur système s'écrit ;**

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

1) calcul de pas ; $\Delta x, \Delta y$

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{L}{n_x - 1} = \frac{0.04}{4} = 0.01 \\ \partial x = \frac{\Delta x_2 + \Delta x_1}{2} = 0.01 \end{cases}, \text{ et } \begin{cases} \Delta y = \frac{l}{n_y - 1} = \frac{0.05}{5} = 0.01 \\ \partial y = \frac{\Delta y_2 + \Delta y_1}{2} = 0.01 \end{cases}$$

2) discréétisation de l'équation sur le volume de contrôle pour le schéma implicite

a- nœuds interne ; nœud (8), (9), (10), (11), (14), (15), (16), (17), (20), (21), (22), (23)

$$-a_N T_N^{(1)} + a_P T_P^{(1)} - a_S T_S^{(1)} = a_W T_W^{(1)} + a_E T_E^{(1)} + B$$

D'où ;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_W = \frac{Z \delta y \lambda_w}{\Delta x_w} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{0.01} = 35 \\ a_E = \frac{Z \delta y \lambda_e}{\Delta x_e} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{0.01} = 35 \\ a_N = \frac{Z \delta x \lambda_n}{\Delta y_n} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{0.01} = 35 \\ a_S = \frac{Z \delta x \lambda_s}{\Delta y_s} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{0.01} = 35 \\ ap = a_W + a_E + a_N + a_S + a_P^{(0)} = 140 + 3500 = 3640 \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho C_p Z \delta x \delta y}{\Delta t} = \frac{1000 \times 3500 \times 1 \times 0.01 \times 0.01}{0.1} = 3500 \\ B = a_P^{(0)} T_P^{(0)} = 3500 \times 425 = 1487500 \end{array} \right.$$

Alors, la discréétisation devient pour chaque nœud comme suit ;

$$noeud : (8) \quad -35T_7^{(1)} + 3640T_8^{(1)} - 35T_9^{(1)} = 35T_2^{(1)} + 35T_{14}^{(1)} + 1487500$$

$$noeud : (9) \quad -35T_8^{(1)} + 3640T_9^{(1)} - 35T_{10}^{(1)} = 35T_3^{(1)} + 35T_{15}^{(1)} + 1487500$$

$$noeud : (10) \quad -35T_9^{(1)} + 3640T_{10}^{(1)} - 35T_{11}^{(1)} = 35T_4^{(1)} + 35T_{16}^{(1)} + 1487500$$

$$noeud : (11) \quad -35T_{10}^{(1)} + 3640T_{11}^{(1)} - 35T_{12}^{(1)} = 35T_5^{(1)} + 35T_{17}^{(1)} + 1487500$$

$$noeud : (14) \quad -35T_{13}^{(1)} + 3640T_{14}^{(1)} - 35T_{15}^{(1)} = 35T_8^{(1)} + 35T_{20}^{(1)} + 1487500$$

$$noeud : (15) \quad -35T_{14}^{(1)} + 3640T_{15}^{(1)} - 35T_{16}^{(1)} = 35T_9^{(1)} + 35T_{21}^{(1)} + 1487500$$

$$noeud : (16) \quad -35T_{15}^{(1)} + 3640T_{16}^{(1)} - 35T_{17}^{(1)} = 35T_{10}^{(1)} + 35T_{22}^{(1)} + 1487500$$

$$noeud : (17) \quad -35T_{16}^{(1)} + 3640T_{17}^{(1)} - 35T_{18}^{(1)} = 35T_{11}^{(1)} + 35T_{23}^{(1)} + 1487500$$

$$noeud : (20) \quad -35T_{19}^{(1)} + 3640T_{20}^{(1)} - 35T_{21}^{(1)} = 35T_{14}^{(1)} + 35T_{26}^{(1)} + 1487500$$

$$noeud : (21) \quad -35T_{20}^{(1)} + 3640T_{21}^{(1)} - 35T_{22}^{(1)} = 35T_{15}^{(1)} + 35T_{27}^{(1)} + 1487500$$

$$noeud : (22) \quad -35T_{21}^{(1)} + 3640T_{22}^{(1)} - 35T_{23}^{(1)} = 35T_{16}^{(1)} + 35T_{28}^{(1)} + 1487500$$

$$noeud : (23) \quad -35T_{22}^{(1)} + 3640T_{23}^{(1)} - 35T_{24}^{(1)} = 35T_{17}^{(1)} + 35T_{29}^{(1)} + 1487500$$

b- nœuds aux bords gauche ; nœud (2), (3), (4), (5)

la discréétisation se fait sur un demi volume de contrôle, et en tenant compte que le terme

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_P = 0 \text{ (conditions aux limites)}$$

$$\rho C_P \frac{Z \delta x \delta y}{2\Delta t} (T_P^{(1)} - T_P^{(0)}) = \lambda_e Z \delta y_e \left(\frac{T_E^{(1)} - T_P^{(1)}}{\Delta x_e} \right) + \frac{\lambda_n Z \delta x_n}{2} \left(\frac{T_N^{(1)} - T_P^{(1)}}{\Delta y_n} \right) - \frac{\lambda_s Z \delta x_s}{2} \left(\frac{T_P^{(1)} - T_S^{(1)}}{\Delta y_s} \right)$$

Après simplification l'équation devient ;

$$-a_N T_N^{(1)} + a_P T_P^{(1)} - a_S T_S^{(1)} = a_E T_E^{(1)} + B$$

D'où ;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = \frac{Z \delta y \lambda_e}{\Delta x_e} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{0.01} = 35 \\ a_N = \frac{Z \delta x_n \lambda_n}{2 \times \Delta y_n} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{2 \times 0.01} = 17.5 \\ a_S = \frac{Z \delta x \lambda_s}{2 \times \Delta y_s} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{2 \times 0.01} = 17.5 \\ ap = a_E + a_N + a_S + a_P^{(0)} = 35 + 17.5 + 17.5 + 1750 = 1820 \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho C_p Z \delta x \delta y}{2 \times \Delta t} = \frac{1000 \times 3500 \times 1 \times 0.01 \times 0.01}{2 \times 0.1} = 1750 \\ B = a_P^{(0)} T_P^{(0)} = 1750 \times 425 = 743750 \end{array} \right.$$

Alors, la discréétisation devient pour chaque nœud comme suit ;

$$\text{noeud :}(2) \quad -17.5 T_1^{(1)} + 1820 T_2^{(1)} - 17.5 T_3^{(1)} = 35 T_8^{(1)} + 7437500$$

$$\text{noeud :}(3) \quad -17.5 T_2^{(1)} + 1820 T_3^{(1)} - 17.5 T_4^{(1)} = 35 T_9^{(1)} + 7437500$$

$$\text{noeud :}(4) \quad -17.5 T_3^{(1)} + 1820 T_4^{(1)} - 17.5 T_5^{(1)} = 35 T_{10}^{(1)} + 7437500$$

$$\text{noeud :}(5) \quad -17.5 T_4^{(1)} + 1820 T_5^{(1)} - 17.5 T_6^{(1)} = 35 T_{11}^{(1)} + 7437500$$

c- nœuds aux bords droits ; noeud (26), (27), (28), (29)

la discréétisation se fait sur un demi volume de contrôle, et en tenant compte que le terme

$$\lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_P = h(T_\infty - T_p) \text{ (conditions aux limites)}$$

$$\begin{aligned} \rho C_p \frac{Z \delta x \delta y}{2 \Delta t} (T_p^{(1)} - T_p^{(0)}) &= Z \delta y h (T_\infty - T_p^{(1)}) - \lambda_w Z \delta y \left(\frac{T_p^{(1)} - T_w^{(1)}}{\Delta x_w} \right) + \frac{\lambda_n Z \delta x_n}{2} \left(\frac{T_n^{(1)} - T_p^{(1)}}{\Delta y_n} \right) \\ &\quad - \frac{\lambda_s Z \delta x_s}{2} \left(\frac{T_p^{(1)} - T_s^{(1)}}{\Delta y_s} \right) \end{aligned}$$

Après simplification l'équation devient ;

$$-a_N T_N^{(1)} + a_P T_P^{(1)} - a_S T_S^{(1)} = a_W T_W^{(1)} + B$$

D'où ;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_W = \frac{Z \delta y \lambda_w}{\Delta x_w} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{0.01} = 35 \\ a_N = \frac{Z \delta x_n \lambda_n}{2 \times \Delta y_n} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{2 \times 0.01} = 17.5 \\ a_S = \frac{Z \delta x \lambda_s}{2 \times \Delta y_s} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{2 \times 0.01} = 17.5 \\ ap = a_W + a_N + a_S + a_P^{(0)} + b' = 35 + 17.5 + 17.5 + 1750 + (100 \times 0.01 \times 1) = 1821 \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho C_p Z \delta x \delta y}{2 \times \Delta t} = \frac{1000 \times 3500 \times 1 \times 0.01 \times 0.01}{2 \times 0.1} = 1750 \\ B = a_P^{(0)} T_P^{(0)} + h \delta y Z T_\infty = 1750 \times 425 + 100 \times 0.01 \times 1 \times 25 = 787525 \end{array} \right.$$

Alors, la discréétisation devient pour chaque noeud comme suit ;

$$\text{noeud : (26)} \quad -17.5 T_{27}^{(1)} + 1821 T_{26}^{(1)} - 17.5 T_{25}^{(1)} = 35 T_{20}^{(1)} + 787525$$

$$\text{noeud : (27)} \quad -17.5 T_{28}^{(1)} + 1821 T_{27}^{(1)} - 17.5 T_{26}^{(1)} = 35 T_{21}^{(1)} + 787525$$

$$\text{noeud : (28)} \quad -17.5 T_{29}^{(1)} + 1821 T_{28}^{(1)} - 17.5 T_{27}^{(1)} = 35 T_{22}^{(1)} + 787525$$

$$\text{noeud : (29)} \quad -17.5 T_{30}^{(1)} + 1821 T_{29}^{(1)} - 17.5 T_{28}^{(1)} = 35 T_{23}^{(1)} + 787525$$

d- noeuds au bord inferieure ; noeud (7), (13), (19)

la discréétisation se fait sur un demi volume de contrôle, et en tenant compte que le terme

$$\lambda_p \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_P = 0 \text{ (conditions aux limites)}$$

$$\rho C_p \frac{Z \delta x \delta y}{2 \Delta t} (T_P^{(1)} - T_P^{(0)}) = \frac{\lambda_e Z \delta y_e}{2} \left(\frac{T_E^{(1)} - T_P^{(1)}}{\Delta x_e} \right) - \frac{\lambda_w Z \delta y_w}{2} \left(\frac{T_P^{(1)} - T_W^{(1)}}{\Delta x_w} \right) + \lambda_n Z \delta x \left(\frac{T_N^{(1)} - T_P^{(1)}}{\Delta y_n} \right)$$

Après simplification l'équation devient ;

$$-a_N T_N^{(1)} + a_P T_P^{(1)} = a_E T_E^{(1)} + a_W T_W^{(1)} + B$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = \frac{Z \delta y \lambda_e}{2 \times \Delta x_e} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{2 \times 0.01} = 17.5 \\ a_W = \frac{Z \delta y \lambda_w}{2 \times \Delta x_w} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{2 \times 0.01} = 17.5 \\ a_N = \frac{Z \delta x \lambda_n}{\Delta y_n} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{0.01} = 35 \\ ap = a_E + a_W + a_N + a_P^{(0)} = 17.5 + 17.5 + 35 + 1750 = 1820 \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho C_p Z \delta x \delta y}{2 \times \Delta t} = \frac{1000 \times 3500 \times 1 \times 0.01 \times 0.01}{2 \times 0.1} = 1750 \\ B = a_P^{(0)} T_p^{(0)} = 1750 \times 425 = 787500 \end{array} \right.$$

Alors, la discréétisation devient pour chaque nœud comme suit ;

$$noeud : (7) \quad -35T_8^{(1)} + 1820T_7^{(1)} = 17.5T_{13}^{(1)} + 17.5T_1 + 787500$$

$$noeud : (13) \quad -35T_{14}^{(1)} + 1820T_{13}^{(1)} = 17.5T_{19}^{(1)} + 17.5T_7 + 787500$$

$$noeud : (19) \quad -35T_{20}^{(1)} + 1820T_{19}^{(1)} = 17.5T_{25}^{(1)} + 17.5T_{13} + 787500$$

e- nœuds au bord supérieur ; nœud (12), (18), (24)

La discréétisation se fait sur un demi-volume de contrôle, et en tenant compte que le terme

$$\lambda_p \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_P = h(T_\infty - T_p) \text{ (conditions aux limites)}$$

$$\begin{aligned} \rho C_p \frac{Z \delta x \delta y}{2 \Delta t} (T_p^{(1)} - T_p^{(0)}) &= \frac{\lambda_e Z \delta y_e}{2} \left(\frac{T_E^{(1)} - T_P^{(1)}}{\Delta x_e} \right) - \frac{\lambda_w Z \delta y_w}{2} \left(\frac{T_P^{(1)} - T_W^{(1)}}{\Delta x_w} \right) + \\ &\quad + Z \delta x h (T_\infty - T_P^{(1)}) - \lambda_s Z \delta x \left(\frac{T_P^{(1)} - T_S^{(1)}}{\Delta y_s} \right) \end{aligned}$$

Après simplification l'équation devient ;

$$a_P T_P^{(1)} = a_E T_E^{(1)} + a_W T_W^{(1)} + a_S T_S^{(1)} + B$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = \frac{Z \delta y \lambda_e}{2 \times \Delta x_e} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{2 \times 0.01} = 17.5 \\ a_W = \frac{Z \delta y \lambda_w}{2 \times \Delta x_w} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{2 \times 0.01} = 17.5 \\ a_S = \frac{Z \delta x \lambda_s}{\Delta y_s} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{0.01} = 35 \\ ap = a_E + a_W + a_S + a_P^{(0)} + b = 17.5 + 17.5 + 35 + 1750 + (1 \times 0.01 \times 100) = 1821 \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho C_p Z \delta x \delta y}{2 \times \Delta t} = \frac{1000 \times 3500 \times 1 \times 0.01 \times 0.01}{2 \times 0.1} = 1750 \\ B = a_P^{(0)} T_P^{(0)} + Z \delta x h T_\infty = 1750 \times 425 + (1 \times 0.01 \times 100 \times 25) = 787525 \end{array} \right.$$

Alors, la discréétisation devient pour chaque nœud comme suit ;

$$\text{noeud : (12)} \quad +1821T_{12}^{(1)} - 35T_{11}^{(1)} = 17.5T_{18}^{(1)} + 17.5T_6 + 787525$$

$$\text{noeud : (18)} \quad +1821T_{18}^{(1)} - 35T_{17}^{(1)} = 17.5T_{24}^{(1)} + 17.5T_{12} + 787525$$

$$\text{noeud : (24)} \quad +1821T_{24}^{(1)} - 35T_{23}^{(1)} = 17.5T_{30}^{(1)} + 17.5T_{18} + 787525$$

f- nœuds au coin inferieur gauche ; nœud (1)

La discréétisation se fait sur un demi-volume de contrôle, et en tenant compte que le terme

$$\lambda_P \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_P = 0, \lambda_P \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_P = 0 \text{ (conditions aux limites)}$$

$$\rho C_p \frac{Z \delta x \delta y}{4 \Delta t} (T_P^{(1)} - T_P^{(0)}) = \frac{\lambda_e Z \delta y_e}{2} \left(\frac{T_E^{(1)} - T_P^{(1)}}{\Delta x_e} \right) + \frac{\lambda_n Z \delta x}{2} \left(\frac{T_N^{(1)} - T_P^{(1)}}{\Delta y_n} \right)$$

Après simplification l'équation devient ;

$$-a_N T_N^{(1)} + a_P T_P^{(1)} = a_E T_E^{(1)} + B$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = \frac{Z \delta y \lambda_e}{2 \times \Delta x_e} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{2 \times 0.01} = 17.5 \\ a_N = \frac{Z \delta y \lambda_n}{2 \times \Delta y_n} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{2 \times 0.01} = 17.5 \\ ap = a_E + a_N + a_P^{(0)} = 17.5 + 17.5 + 875 = 910 \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho C_p Z \delta x \delta y}{4 \times \Delta t} = \frac{1000 \times 3500 \times 1 \times 0.01 \times 0.01}{4 \times 0.1} = 875 \\ B = a_P^{(0)} T_P^{(0)} = 875 \times 425 = 371875 \end{array} \right.$$

Alors, la discréétisation devient pour chaque nœud comme suit ;

$$\text{noeud : (1) } -17.5 T_2^{(1)} + 910 T_1^{(1)} = 17.5 T_7^{(1)} + 371875$$

g- nœuds au coin supérieur gauche ; nœud (6)

La discréétisation se fait sur un demi-volume de contrôle, et en tenant compte que le terme

$$\lambda_P \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_P = 0, \lambda_P \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_P = h(T_\infty - T_P) \text{ (conditions aux limites)}$$

$$\rho C_p \frac{Z \delta x \delta y}{4 \Delta t} (T_P^{(1)} - T_P^{(0)}) = \frac{\lambda_e Z \delta y_e}{2} \left(\frac{T_E^{(1)} - T_P^{(1)}}{\Delta x_e} \right) + Z \times \frac{\delta x}{2} h (T_\infty - T_P) - \frac{\lambda_s Z \delta x}{2} \left(\frac{T_P^{(1)} - T_S^{(1)}}{\Delta y_s} \right)$$

Après simplification l'équation devient ;

$$+ a_P T_P^{(1)} - a_S T_S^{(1)} = a_E T_E^{(1)} + B$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = \frac{Z \delta y \lambda_e}{2 \times \Delta x_e} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{2 \times 0.01} = 17.5 \\ \\ a_S = \frac{Z \delta y \lambda_s}{2 \times \Delta y_s} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{2 \times 0.01} = 17.5 \\ \\ ap = a_E + a_S + a_P^{(0)} + Z \times \frac{\delta x \delta y}{2} h = 17.5 + 17.5 + 875 + 1 \times \frac{0.01}{2} \times 100 = 910.5 \\ \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho C_p Z \delta x \delta y}{4 \times \Delta t} = \frac{1000 \times 3500 \times 1 \times 0.01 \times 0.01}{4 \times 0.1} = 875 \\ \\ B = a_P^{(0)} T_P^{(0)} + Z \times \frac{\delta x}{2} h \times T_\infty = 875 \times 425 + 1 \times \frac{0.01}{2} \times 100 \times 25 = 371887.5 \end{array} \right.$$

Alors, la discréétisation devient pour chaque nœud comme suit ;

$$noeud (6); \quad 910.5 T_6^{(1)} - 17.5 T_5^{(1)} = 17.5 T_{12}^{(1)} + 371887.5$$

h- nœud au coin supérieur à droite ; nœud (30)

La discréétisation se fait sur un demi-volume de contrôle, et en tenant compte que le terme

$$\lambda_P \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_P = h(T_\infty - T_P), \quad \lambda_P \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_P = h(T_\infty - T_P) \text{ (conditions aux limites)}$$

$$\begin{aligned} \rho C_p \frac{Z \delta x \delta y}{4 \Delta t} (T_P^{(1)} - T_P^{(0)}) &= Z \frac{\delta y}{2} h (T_\infty - T_P) - \frac{\lambda_w Z \delta y_w}{2} \left(\frac{T_P^{(1)} - T_W^{(1)}}{\Delta x_w} \right) + Z \frac{\delta x}{2} h (T_\infty - T_P) \\ &\quad - \frac{\lambda_s Z \delta x}{2} \left(\frac{T_P^{(1)} - T_S^{(1)}}{\Delta y_s} \right) \end{aligned}$$

Après simplification l'équation devient ;

$$+ a_P T_P^{(1)} - a_S T_S^{(1)} = a_W T_W^{(1)} + B$$

D'où ;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_W = \frac{Z \delta y \lambda_w}{2 \times \Delta x_w} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{2 \times 0.01} = 17.5 \\ a_S = \frac{Z \delta x \lambda_s}{2 \times \Delta y_s} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{2 \times 0.01} = 17.5 \\ ap = a_W + a_S + a_P^{(0)} + Z \times \frac{\delta y}{2} h + Z \times \frac{\delta x}{2} h = 17.5 + 17.5 + 875 + 1 \times \frac{0.01 + 0.01}{2} \times 100 = 911 \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho C_p Z \delta x \delta y}{4 \times \Delta t} = \frac{1000 \times 3500 \times 1 \times 0.01 \times 0.01}{4 \times 0.1} = 875 \\ B = a_P^{(0)} T_P^{(0)} + Z \times \frac{\delta x}{2} h \times T_\infty + Z \times \frac{\delta y}{2} h \times T_\infty = 875 \times 425 + 1 \times \frac{0.01}{2} \times 100 \times 25 \times 2 = 371900 \end{array} \right.$$

Alors, la discréétisation devient pour chaque noeud comme suit ;

$$noeud (30); \quad 911T_{30}^{(1)} - 17.5T_{29}^{(1)} = 17.5T_{24}^{(1)} + 371900$$

i- noeud au coin inférieur à droite ; noeud (25)

La discréétisation se fait sur un demi-volume de contrôle, et en tenant compte que le terme

$$\lambda_P \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_P = h(T_\infty - T_P), \lambda_P \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_P = 0 \text{ (conditions aux limites)}$$

$$\rho C_p \frac{Z \delta x \delta y}{4 \Delta t} (T_P^{(1)} - T_P^{(0)}) = Z \frac{\delta y}{2} h (T_\infty - T_P) - \frac{\lambda_w Z \delta y_w}{2} \left(\frac{T_P^{(1)} - T_W^{(1)}}{\Delta x_w} \right) + \frac{\lambda_n Z \delta n}{2} \left(\frac{T_N^{(1)} - T_P^{(1)}}{\Delta y_n} \right)$$

Après simplification l'équation devient ;

$$-a_N T_N^{(1)} + a_P T_P^{(1)} = a_W T_W^{(1)} + B$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_W = \frac{Z \delta y \lambda_w}{2 \times \Delta x_w} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{2 \times 0.01} = 17.5 \\ a_N = \frac{Z \delta x \lambda_n}{2 \times \Delta y_n} = \frac{1 \times 0.01 \times 35}{2 \times 0.01} = 17.5 \\ ap = a_W + a_N + a_P^{(0)} + Z \times \frac{\delta y}{2} h = 17.5 + 17.5 + 875 + 1 \times \frac{0.01}{2} \times 100 = 910.5 \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho C_p Z \delta x \delta y}{4 \times \Delta t} = \frac{1000 \times 3500 \times 1 \times 0.01 \times 0.01}{4 \times 0.1} = 875 \\ B = a_P^{(0)} T_P^{(0)} + Z \times \frac{\delta y}{2} h \times T_\infty = 875 \times 425 + 1 \times \frac{0.01}{2} \times 100 \times 25 = 371887.5 \end{array} \right.$$

Alors, la discréttisation devient pour chaque noeud comme suit ;

$$noeud (25); -17.5T_{26}^{(1)} + 9110.5T_{25}^{(1)} = 17.5T_{19}^{(1)} + 371887.5$$

3) Résolution de l'ensemble du système par la méthode de DTMA

Pour résoudre ce système nous devons réécrire le système en suivant l'ordre des colonnes, puis nous appliquons la méthode de DTMA pour chaque colonne

a- Colonne (1)

$$noeud : (1) -17.5T_2^{(1)} + 910T_1^{(1)} = 17.5T_7^{(1)} + 371875$$

$$noeud : (2) -17.5T_1^{(1)} + 1820T_2^{(1)} - 17.5T_3^{(1)} = 35T_8^{(1)} + 7437500$$

$$noeud : (3) -17.5T_2^{(1)} + 1820T_3^{(1)} - 17.5T_4^{(1)} = 35T_9^{(1)} + 7437500$$

$$noeud : (4) -17.5T_3^{(1)} + 1820T_4^{(1)} - 17.5T_5^{(1)} = 35T_{10}^{(1)} + 7437500$$

$$noeud : (5) -17.5T_4^{(1)} + 1820T_5^{(1)} - 17.5T_6^{(1)} = 35T_{11}^{(1)} + 7437500$$

$$noeud : (6) 910.5T_6^{(1)} - 17.5T_5^{(1)} = 17.5T_{12}^{(1)} + 371887.5$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 910 & -17.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -17.5 & 1820 & -17.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17.5 & 1820 & -17.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -17.5 & 1820 & -17.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -17.5 & 1820 & -17.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17.5 & 910.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1^{(1)} \\ T_2^{(1)} \\ T_3^{(1)} \\ T_4^{(1)} \\ T_5^{(1)} \\ T_6^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.5T_7^{(1)} + 371875 \\ 35T_8^{(1)} + 7437500 \\ 35T_9^{(1)} + 7437500 \\ 35T_{10}^{(1)} + 7437500 \\ 35T_{11}^{(1)} + 7437500 \\ 17.5T_{12}^{(1)} + 371887.5 \end{bmatrix}$$

On pose le vecteur $[T_7^{(1)}, T_8^{(1)}, T_9^{(1)}, T_{10}^{(1)}, T_{11}^{(1)}, T_{12}^{(1)}] = 0$, la matrice devient ;

$$\begin{bmatrix} 910 & -17.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -17.5 & 1820 & -17.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17.5 & 1820 & -17.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -17.5 & 1820 & -17.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -17.5 & 1820 & -17.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17.5 & 910.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1^{(1)} \\ T_2^{(1)} \\ T_3^{(1)} \\ T_4^{(1)} \\ T_5^{(1)} \\ T_6^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 371875 \\ 7437500 \\ 7437500 \\ 7437500 \\ 7437500 \\ 371887.5 \end{bmatrix}$$

b- Colonne (2)

$$noeud : (7) \quad -35T_8^{(1)} + 1820T_7^{(1)} = 17.5T_{13}^{(1)} + 17.5T_1 + 787500$$

$$noeud : (8) \quad -35T_7^{(1)} + 3640T_8^{(1)} - 35T_9^{(1)} = 35T_2^{(1)} + 35T_{14}^{(1)} + 1487500$$

$$noeud : (9) \quad -35T_8^{(1)} + 3640T_9^{(1)} - 35T_{10}^{(1)} = 35T_3^{(1)} + 35T_{15}^{(1)} + 1487500$$

$$noeud : (10) \quad -35T_9^{(1)} + 3640T_{10}^{(1)} - 35T_{11}^{(1)} = 35T_4^{(1)} + 35T_{16}^{(1)} + 1487500$$

$$noeud : (11) \quad -35T_{10}^{(1)} + 3640T_{11}^{(1)} - 35T_{12}^{(1)} = 35T_5^{(1)} + 35T_{17}^{(1)} + 1487500$$

$$noeud : (12) \quad +1821T_{12}^{(1)} - 35T_{11}^{(1)} = 17.5T_{18}^{(1)} + 17.5T_6 + 787525$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & \Leftrightarrow & \\
 \left[\begin{array}{cccccc} 1820 & -35 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \times & \left[\begin{array}{c} T_7^{(1)} \\ T_8^{(1)} \\ T_9^{(1)} \\ T_{10}^{(1)} \\ T_{11}^{(1)} \\ T_{12}^{(1)} \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c} 17.5T_{13}^{(1)} + 17.5T_1 + 787500 \\ 35T_2^{(1)} + 35T_{14}^{(1)} + 1487500 \\ 35T_3^{(1)} + 35T_{15}^{(1)} + 1487500 \\ 35T_4^{(1)} + 35T_{16}^{(1)} + 1487500 \\ 35T_5^{(1)} + 35T_{17}^{(1)} + 1487500 \\ 17.5T_{18}^{(1)} + 17.5T_6 + 787525 \end{array} \right]
 \end{array}$$

On pose le vecteur $[T_7^{(1)}, T_8^{(1)}, T_9^{(1)}, T_{10}^{(1)}, T_{11}^{(1)}, T_{12}^{(1)}] = 0$, la matrice devient ;

$$\begin{array}{ccccccc}
 \left[\begin{array}{cccccc} 1820 & -35 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \times & \left[\begin{array}{c} T_7^{(1)} \\ T_8^{(1)} \\ T_9^{(1)} \\ T_{10}^{(1)} \\ T_{11}^{(1)} \\ T_{12}^{(1)} \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c} 17.5T_1 + 787500 \\ 35T_2^{(1)} + 1487500 \\ 35T_3^{(1)} + 1487500 \\ 35T_4^{(1)} + 1487500 \\ 35T_5^{(1)} + 1487500 \\ 17.5T_6 + 787525 \end{array} \right]
 \end{array}$$

c- Colonne (3)

$$\text{noeud : (13)} \quad -35T_{14}^{(1)} + 1820T_{13}^{(1)} = 17.5T_{19}^{(1)} + 17.5T_7 + 787500$$

$$\text{noeud : (14)} \quad -35T_{13}^{(1)} + 3640T_{14}^{(1)} - 35T_{15}^{(1)} = 35T_8^{(1)} + 35T_{20}^{(1)} + 1487500$$

$$\text{noeud : (15)} \quad -35T_{14}^{(1)} + 3640T_{15}^{(1)} - 35T_{16}^{(1)} = 35T_9^{(1)} + 35T_{21}^{(1)} + 1487500$$

$$\text{noeud : (16)} \quad -35T_{15}^{(1)} + 3640T_{16}^{(1)} - 35T_{17}^{(1)} = 35T_{10}^{(1)} + 35T_{22}^{(1)} + 1487500$$

$$\text{noeud : (17)} \quad -35T_{16}^{(1)} + 3640T_{17}^{(1)} - 35T_{18}^{(1)} = 35T_{11}^{(1)} + 35T_{23}^{(1)} + 1487500$$

$$\text{noeud : (18)} \quad +1821T_{18}^{(1)} - 35T_{17}^{(1)} = 17.5T_{24}^{(1)} + 17.5T_{12} + 787525$$

\Leftrightarrow

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1820 & -35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35 & 3640 & -35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 3640 & -35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -35 & 3640 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -35 & 3640 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -35 & 1821 \end{array} \right] \begin{bmatrix} T_{13}^{(1)} \\ T_{14}^{(1)} \\ T_{15}^{(1)} \\ T_{16}^{(1)} \\ T_{17}^{(1)} \\ T_{18}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.5T_{19}^{(1)} + 17.5T_7 + 787500 \\ 35T_8^{(1)} + 35T_{20}^{(1)} + 1487500 \\ 35T_9^{(1)} + 35T_{21}^{(1)} + 1487500 \\ 35T_{10}^{(1)} + 35T_{22}^{(1)} + 1487500 \\ 35T_{11}^{(1)} + 35T_{23}^{(1)} + 1487500 \\ 17.5T_{24}^{(1)} + 17.5T_{12} + 787525 \end{bmatrix}$$

On pose le vecteur $[T_{19}^{(1)}, T_{20}^{(1)}, T_{21}^{(1)}, T_{22}^{(1)}, T_{23}^{(1)}, T_{24}^{(1)}] = 0$, la matrice devient ;

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1820 & -35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35 & 3640 & -35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 3640 & -35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -35 & 3640 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -35 & 3640 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -35 & 1821 \end{array} \right] \begin{bmatrix} T_{13}^{(1)} \\ T_{14}^{(1)} \\ T_{15}^{(1)} \\ T_{16}^{(1)} \\ T_{17}^{(1)} \\ T_{18}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.5T_7 + 787500 \\ 35T_8^{(1)} + 1487500 \\ 35T_9^{(1)} + 1487500 \\ 35T_{10}^{(1)} + 1487500 \\ 35T_{11}^{(1)} + 1487500 \\ 17.5T_{24}^{(1)} + 787525 \end{bmatrix}$$

d- Colonne (4)

$$\text{noeud : (19)} \quad -35T_{20}^{(1)} + 1820T_{19}^{(1)} = 17.5T_{25}^{(1)} + 17.5T_{13}^{(1)} + 787500$$

$$\text{noeud : (20)} \quad -35T_{19}^{(1)} + 3640T_{20}^{(1)} - 35T_{21}^{(1)} = 35T_{14}^{(1)} + 35T_{26}^{(1)} + 1487500$$

$$\text{noeud : (21)} \quad -35T_{20}^{(1)} + 3640T_{21}^{(1)} - 35T_{22}^{(1)} = 35T_{15}^{(1)} + 35T_{27}^{(1)} + 1487500$$

$$\text{noeud : (22)} \quad -35T_{21}^{(1)} + 3640T_{22}^{(1)} - 35T_{23}^{(1)} = 35T_{16}^{(1)} + 35T_{28}^{(1)} + 1487500$$

$$\text{noeud : (23)} \quad -35T_{22}^{(1)} + 3640T_{23}^{(1)} - 35T_{24}^{(1)} = 35T_{17}^{(1)} + 35T_{29}^{(1)} + 1487500$$

$$\text{noeud : (24)} \quad +1821T_{24}^{(1)} - 35T_{23}^{(1)} = 17.5T_{30}^{(1)} + 17.5T_{18}^{(1)} + 787525$$

$$\begin{bmatrix} 1820 & -35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35 & 3640 & -35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 3640 & -35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -35 & 3640 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -35 & 3640 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -35 & 1821 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{19}^{(1)} \\ T_{20}^{(1)} \\ T_{21}^{(1)} \\ T_{22}^{(1)} \\ T_{23}^{(1)} \\ T_{24}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.5T_{25}^{(1)} + 17.5T_{13}^{(1)} + 787500 \\ 35T_{14}^{(1)} + 35T_{26}^{(1)} + 1487500 \\ 35T_{15}^{(1)} + 35T_{27}^{(1)} + 1487500 \\ 35T_{16}^{(1)} + 35T_{28}^{(1)} + 1487500 \\ 35T_{17}^{(1)} + 35T_{29}^{(1)} + 1487500 \\ 17.5T_{30}^{(1)} + 17.5T_{18}^{(1)} + 787525 \end{bmatrix}$$

On pose le vecteur $[T_{25}^{(1)}, T_{26}^{(1)}, T_{27}^{(1)}, T_{28}^{(1)}, T_{29}^{(1)}, T_{30}^{(1)}] = 0$, la matrice devient ;

$$\begin{bmatrix}
 1820 & -35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -35 & 3640 & -35 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -35 & 3640 & -35 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -35 & 3640 & -35 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -35 & 3640 & -35 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -35 & 1821
 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}
 T_{19}^{(1)} \\
 T_{20}^{(1)} \\
 T_{21}^{(1)} \\
 T_{22}^{(1)} \\
 T_{23}^{(1)} \\
 T_{24}^{(1)}
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 17.5T_{13} + 787500 \\
 35T_{14}^{(1)} + 1487500 \\
 35T_{15}^{(1)} + 1487500 \\
 35T_{16}^{(1)} + 1487500 \\
 35T_{17}^{(1)} + 1487500 \\
 17.5T_{18} + 787525
 \end{bmatrix}$$

e- Colonne (5)

$$noeud :(25) \quad -17.5T_{26}^{(1)} + 910.5T_{25}^{(1)} = 17.5T_{19}^{(1)} + 371887.5$$

$$noeud :(26) \quad -17.5T_{27}^{(1)} + 1821T_{26}^{(1)} - 17.5T_{25}^{(1)} = 35T_{20}^{(1)} + 787525$$

$$noeud :(27) \quad -17.5T_{28}^{(1)} + 1821T_{27}^{(1)} - 17.5T_{26}^{(1)} = 35T_{21}^{(1)} + 787525$$

$$noeud :(28) \quad -17.5T_{29}^{(1)} + 1821T_{28}^{(1)} - 17.5T_{27}^{(1)} = 35T_{22}^{(1)} + 787525$$

$$noeud :(29) \quad -17.5T_{30}^{(1)} + 1821T_{29}^{(1)} - 17.5T_{28}^{(1)} = 35T_{23}^{(1)} + 787525$$

$$noeud :(30) \quad 911T_{30}^{(1)} - 17.5T_{29}^{(1)} = 17.5T_{24}^{(1)} + 371900$$

\Leftrightarrow

$$\begin{bmatrix} 910.5 & -17.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -17.5 & 1821 & -17.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17.5 & 1821 & -17.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -17.5 & 1821 & -17.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -17.5 & 1821 & -17.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17.5 & 911 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_{25}^{(1)} \\ T_{26}^{(1)} \\ T_{27}^{(1)} \\ T_{28}^{(1)} \\ T_{29}^{(1)} \\ T_{30}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.5T_{19}^{(1)} + 371887.5 \\ 35T_{20}^{(1)} + 787525 \\ 35T_{21}^{(1)} + 787525 \\ 35T_{22}^{(1)} + 787525 \\ 35T_{23}^{(1)} + 787525 \\ 17.5T_{24}^{(1)} + 371900 \end{bmatrix}$$

Puis on résout la matrice par la méthode de DTMA pour obtenir les valeurs de ;

Colonne (1)	Colonne (2)	Colonne (3)	Colonne (4)	Colonne (5)
-------------	-------------	-------------	-------------	-------------

$\begin{bmatrix} T_1^{(1)} \\ T_2^{(1)} \\ T_3^{(1)} \\ T_4^{(1)} \\ T_5^{(1)} \\ T_6^{(1)} \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} T_7^{(1)} \\ T_8^{(1)} \\ T_9^{(1)} \\ T_{10}^{(1)} \\ T_{11}^{(1)} \\ T_{12}^{(1)} \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} T_{13}^{(1)} \\ T_{14}^{(1)} \\ T_{15}^{(1)} \\ T_{16}^{(1)} \\ T_{17}^{(1)} \\ T_{18}^{(1)} \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} T_{19}^{(1)} \\ T_{20}^{(1)} \\ T_{21}^{(1)} \\ T_{22}^{(1)} \\ T_{23}^{(1)} \\ T_{24}^{(1)} \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} T_{25}^{(1)} \\ T_{26}^{(1)} \\ T_{27}^{(1)} \\ T_{28}^{(1)} \\ T_{29}^{(1)} \\ T_{30}^{(1)} \end{bmatrix}$
--	-----	---	-----	--	-----	--	-----	--

IV.1 Domaine instationnaire en deux dimensions (2D)

Pour ce type de problème l'équation d'énergie s'écrit ;

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p u) \frac{\partial T}{\partial x} + (\rho c_p v) \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S$$

IV.1.1 La discréétisation de cette équation sur le volume de contrôle des nœuds internes du maillage est donné comme suit ;

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_w^e \int_s^n \rho C_p Z \frac{\partial T}{\partial t} dt dx dy + \int_{t_0}^{t_1} \int_w^e \int_s^n Z (\rho c_p u) \frac{\partial T}{\partial x} dt dx dy + \int_{t_0}^{t_1} \int_w^e \int_s^n Z (\rho c_p v) \frac{\partial T}{\partial y} dt dx dy \\ &= \\ & \int_{t_0}^{t_1} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda Z \frac{\partial T}{\partial x} \right) dt dx dy + \int_{t_0}^{t_1} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda Z \frac{\partial T}{\partial y} \right) dt dx dy + \int_{t_0}^{t_1} \int_w^e \int_s^n S Z dt dx dy \end{aligned}$$

Si en suppose que les champs des vitesses et connu, alors l'équation de continuité du fluide

est vérifiée. Dans le cas présent on a donc ; $\frac{\partial(\rho c_p u)}{\partial x} = 0$, et $\frac{\partial(\rho c_p v)}{\partial y} = 0$, ce qui implique

que $\rho c_p u$, et $\rho c_p v$ sont des constants

Après le choix du schéma implicite l'équation devient ;

$$\begin{aligned} & \frac{\rho C_p Z \delta x \delta y}{\Delta t} (T_p^{(1)} - T_p^{(0)}) + Z \delta y (\rho c_p u)_e T_e^{(1)} - Z \delta y (\rho c_p u)_w T_w^{(1)} + Z \delta y (\rho c_p u)_n T_n^{(1)} \\ & - Z \delta y (\rho c_p u)_s T_s^{(1)} \\ &= \\ & Z \delta y \lambda_e \left[\frac{T_e^{(1)} - T_p^{(1)}}{\Delta x_e} \right] - Z \delta y \lambda_w \left[\frac{T_p^{(1)} - T_w^{(1)}}{\Delta x_w} \right] + Z \delta x \lambda_n \left[\frac{T_n^{(1)} - T_p^{(1)}}{\Delta y_n} \right] - Z \delta x \lambda_s \left[\frac{T_p^{(1)} - T_s^{(1)}}{\Delta y_s} \right] \\ & + Z \delta x \delta y (sc - sp T_p^{(1)}) \end{aligned}$$

Le problème qui s'impose est queles températures du terme convectif seront évaluées selon la valeur de la vitesse d'écoulement. Pour cela on assume des approximations appelées ;

a) Schémades différences centrées

Pour des faibles vitesses, on peut évaluer la variation des températures entre les nœuds du maillage linéairement, donc on posera ;

$$\begin{cases} T_e = \frac{T_E + T_P}{2}, T_w = \frac{T_P + T_W}{2} \\ T_n = \frac{T_N + T_P}{2}, T_s = \frac{T_P + T_S}{2} \end{cases}$$

Après le remplacement de ces expressions dans l'équation, on obtient ;

$$\begin{aligned} & \frac{\rho C_p \delta x \delta y}{\Delta t} (T_p^{(1)} - T_p^{(0)}) + \frac{1}{2} \delta y (\rho c_p u)_e (T_E^{(1)} + T_P^{(1)}) - \delta y (\rho c_p u)_w (T_P^{(1)} + T_W^{(1)}) \\ & + \delta x (\rho c_p u)_n (T_N^{(1)} + T_P^{(1)}) - \delta x (\rho c_p u)_s (T_P^{(1)} + T_S^{(1)}) \\ & = \\ & \delta y \lambda_e \left[\frac{T_E^{(1)} - T_P^{(1)}}{\Delta x_e} \right] - \delta y \lambda_w \left[\frac{T_P^{(1)} - T_W^{(1)}}{\Delta x_w} \right] + \delta x \lambda_n \left[\frac{T_N^{(1)} - T_P^{(1)}}{\Delta y_n} \right] - \delta x \lambda_s \left[\frac{T_P^{(1)} - T_S^{(1)}}{\Delta y_s} \right] \\ & + \delta x \delta y (sc - sp T_P^{(1)}) \end{aligned}$$

Après simplification, l'équation discrétisée finale devient de cette forme ;

$$-a_N T_N^{(1)} + a_P T_P^{(1)} - a_S T_S^{(1)} = a_E T_E^{(1)} + a_W T_W^{(1)} + B$$

D'où ;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_N = D_n - \frac{F_n}{2} \\ a_S = D_s + \frac{F_s}{2} \\ a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \\ a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \\ B = a_P^{(0)} T_P^{(0)} + Sc \delta x \delta y \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho c_p \delta x \delta y}{\Delta t} \\ a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^{(0)} + F_e - F_w + F_n - F_s + b' \\ b' = Sp \delta x \delta y \end{array} \right.$$

En posant :

$$\begin{cases} D_e = \frac{\delta y \lambda_e}{\Delta x_e}, D_w = \frac{\delta y \lambda_w}{\Delta x_w}, D_n = \frac{\delta x \lambda_n}{\Delta y_n}, D_s = \frac{\delta y \lambda_s}{\Delta x_s} \\ F_e = \delta y \rho c_p, F_w = \delta y \rho c_p, F_n = \delta x \rho c_p, F_s = \delta x \rho c_p \end{cases}$$

Remarque

- Si le théorème de la continuité est validé le flux d'advection impose que ;

$$F_e = F_w, F_n = F_s \Rightarrow a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^{(0)} + b'$$

- Pour des valeurs de $F_e > 2D_e$, $F_w < -2D_w$, $F_n > 2D_n$, et $F_s > 2D_s$, ce qui implique que $u \in \left[\frac{-2\lambda_w}{\rho c_p \Delta x_w}, \frac{2\lambda_e}{\rho c_p \Delta x_e} \right]$, $v \in \left[\frac{-2\lambda_s}{\rho c_p \Delta y_s}, \frac{2\lambda_n}{\rho c_p \Delta y_n} \right]$; au-delà peuvent conduire à des valeurs irréaliste pour T
- Si l'advection est fortement dominante (vitesse trop élevée) conduit à un sur-maillage, pour pallier cet inconvénient différents schémas sont proposés

b) Schéma amont (Upwind)

Dans le cas où la convection est dominante (la vitesse est grande)

$$F_e > 2D_e \Rightarrow u_e > \frac{2\lambda_e}{\rho c_p \Delta x_e}, F_n > 2D_n \Rightarrow v_n > \frac{2\lambda_n}{\rho c_p \Delta y_n} \text{ la température au nœud voisin restera}$$

très proche à la valeur précédente transporté par la vitesse, donc on suggère deux cas ;

- ✓ 1^{er} cas ; Si la vitesse est positif $(u, v) > 0 \Rightarrow F > 0$

$$\begin{cases} T_e = T_p, T_w = T_w \\ T_n = T_p, T_s = T_s \end{cases}$$

Après le remplacement de ces expressions dans l'équation, on obtient ;

$$\begin{aligned} \frac{\rho C_p \delta x \delta y}{\Delta t} (T_p^{(1)} - T_p^{(0)}) + \delta y (\rho c_p u)_e (T_p^{(1)}) - \delta y (\rho c_p u)_w (T_w^{(1)}) \\ + \delta x (\rho c_p u)_n (T_p^{(1)}) - \delta x (\rho c_p u)_s (T_s^{(1)}) \\ = \\ \delta y \lambda_e \left[\frac{T_E^{(1)} - T_p^{(1)}}{\Delta x_e} \right] - \delta y \lambda_w \left[\frac{T_p^{(1)} - T_w^{(1)}}{\Delta x_w} \right] + \delta x \lambda_n \left[\frac{T_N^{(1)} - T_p^{(1)}}{\Delta y_n} \right] - \delta x \lambda_s \left[\frac{T_p^{(1)} - T_s^{(1)}}{\Delta y_s} \right] \\ + \delta x \delta y (sc - sp T_p^{(1)}) \end{aligned}$$

Après simplification, l'équation discrétisée finale devient de cette forme ;

$$-a_N T_N^{(1)} + a_P T_P^{(1)} - a_S T_S^{(1)} = a_E T_E^{(1)} + a_W T_W^{(1)} + B$$

D'où ;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_N = D_n \\ a_S = D_s + F_s \\ a_E = D_e \\ a_W = D_w + F_w \\ B = a_P^{(0)} T_P^{(0)} + Sc \delta x \delta y \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho c_p \delta x \delta y}{\Delta t} \\ a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^{(0)} + F_e - F_w + F_n - F_s + b' \\ b' = Sp \delta x \delta y \end{array} \right.$$

2ème cas ; Si la vitesse est positif $(u, v) < 0 \Rightarrow F < 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_e = T_E, T_w = T_P \\ T_n = T_N, T_s = T_P \end{array} \right.$$

Après le remplacement de ces expressions dans l'équation, on obtient ;

$$\begin{aligned} & \frac{\rho C_p \delta x \delta y}{\Delta t} (T_p^{(1)} - T_p^{(0)}) + \delta y (\rho c_p u)_e (T_E^{(1)}) - \delta y (\rho c_p u)_w (T_P^{(1)}) \\ & + \delta x (\rho c_p u)_n (T_N^{(1)}) - \delta x (\rho c_p u)_s (T_P^{(1)}) \\ & = \\ & \delta y \lambda_e \left[\frac{T_E^{(1)} - T_P^{(1)}}{\Delta x_e} \right] - \delta y \lambda_w \left[\frac{T_P^{(1)} - T_W^{(1)}}{\Delta x_w} \right] + \delta x \lambda_n \left[\frac{T_N^{(1)} - T_P^{(1)}}{\Delta y_n} \right] - \delta x \lambda_s \left[\frac{T_P^{(1)} - T_S^{(1)}}{\Delta y_s} \right] \\ & + \delta x \delta y (sc - sp T_P^{(1)}) \end{aligned}$$

Après simplification, l'équation discrétisée finale devient de cette forme ;

$$-a_N T_N^{(1)} + a_P T_P^{(1)} - a_S T_S^{(1)} = a_E T_E^{(1)} + a_W T_W^{(1)} + B$$

D'où ;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_N = D_n - F_n \\ a_S = D_s \\ a_E = D_e - F_e \\ a_W = D_w \\ B = a_P^{(0)} T_P^{(0)} + Sc \delta x \delta y \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho c_p \delta x \delta y}{\Delta t} \\ a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^{(0)} + F_e - F_w + F_n - F_s + b' \\ b' = Sp \delta x \delta y \end{array} \right.$$

3ème cas ; Si la vitesse est positif ($u > 0, v < 0 \Rightarrow F_{e,w} > 0, F_{n,s} < 0$

$$\begin{cases} T_e = T_P, T_w = T_W \\ T_n = T_N, T_s = T_P \end{cases}$$

Après le remplacement et simplification, l'équation discrétisée finale devient de cette forme ;

$$-a_N T_N^{(1)} + a_P T_P^{(1)} - a_S T_S^{(1)} = a_E T_E^{(1)} + a_W T_W^{(1)} + B$$

D'où :

$$\left\{
 \begin{aligned}
 a_N &= D_n - F_n \\
 a_S &= D_s \\
 a_E &= D_e \\
 a_W &= D_w + F_w \\
 B &= a_P^{(0)} T_P^{(0)} + Sc \delta x \delta y \\
 a_P^{(0)} &= \frac{\rho c_p \delta x \delta y}{\Delta t} \\
 a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^{(0)} + F_e - F_w + F_n - F_s + b' \\
 b' &= Sp \delta x \delta y
 \end{aligned}
 \right.$$

4^{ème} cas ; Si la vitesse est positif ($u < 0, v > 0 \Rightarrow F_{e,w} < 0, F_{n,s} > 0$)

$$\begin{cases} T_e = T_E, T_w = T_P \\ T_n = T_P, T_s = T_S \end{cases}$$

Après le remplacement et simplification, l'équation discrétisée finale devient de cette forme ;

$$-a_N T_N^{(1)} + a_P T_P^{(1)} - a_S T_S^{(1)} = a_E T_E^{(1)} + a_W T_W^{(1)} + B$$

D'où ;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_N = D_n \\ \\ a_S = D_s + F_s \\ \\ a_E = D_e - F_e \\ \\ a_W = D_w \\ \\ B = a_P^{(0)} T_P^{(0)} + Sc \delta x \delta y \\ \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho c_p \delta x \delta y}{\Delta t} \\ \\ a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^{(0)} + F_e - F_w + F_n - F_s + b' \\ \\ b' = Sp \delta x \delta y \end{array} \right.$$

c) Schéma exponentiel

Pour ce type de schéma l'équation d'énergie s'écrit ;

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \left((\rho c_p u) \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right) + \left((\rho c_p v) \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) = S$$

Après l'intégration sur le volume de contrôle l'équation devient ;

$$\begin{aligned} & \frac{\rho C_p \delta x \delta y}{\Delta t} (T_p^{(1)} - T_p^{(0)}) + \left(\delta y (\rho c_p u)_e T_e^{(1)} - \delta y \lambda_e \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_e \right) - \left(\delta y (\rho c_p u)_w T_w^{(1)} - \delta y \lambda_w \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_w \right) \\ & + \left(\delta y (\rho c_p u)_n T_n^{(1)} - \delta x \lambda_n \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_n \right) - \left(\delta y (\rho c_p u)_s T_s^{(1)} - \delta x \lambda_s \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_s \right) \\ & = \delta x \delta y (sc - sp T_P^{(1)}) \end{aligned}$$

On posera :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta y (\rho c_p u)_e T_e^{(1)} - \delta y \lambda_e \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_e = F_e \left(T_P + \frac{T_p - T_E}{e^{P_e} - 1} \right) \\ \delta y (\rho c_p u)_w T_w^{(1)} - \delta y \lambda_w \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_w = F_w \left(T_W + \frac{T_w - T_P}{e^{P_w} - 1} \right) \\ \delta y (\rho c_p u)_n T_n^{(1)} - \delta x \lambda_n \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_n = F_n \left(T_P + \frac{T_p - T_N}{e^{P_n} - 1} \right) \\ \delta y (\rho c_p u)_s T_s^{(1)} - \delta x \lambda_s \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_s = F_s \left(T_S + \frac{T_s - T_P}{e^{P_s} - 1} \right) \end{array} \right. \quad \text{d'où } P \text{ est le nombre de péclet} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_e = \frac{F_e}{D_e} \\ P_w = \frac{F_w}{D_w} \\ P_n = \frac{F_n}{D_n} \\ P_s = \frac{F_s}{D_s} \end{array} \right.$$

Après le remplacement et simplification, l'équation discrétisée finale devient sous cette forme;

$$-a_N T_N^{(1)} + a_P T_P^{(1)} - a_S T_S^{(1)} = a_E T_E^{(1)} + a_W T_W^{(1)} + B$$

D'où ;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_N = \frac{F_n}{e^{(F_n/D_n)} - 1} \\ a_S = \frac{F_s e^{(F_s/D_s)}}{e^{(F_s/D_s)} - 1} \\ a_E = \frac{F_e}{e^{(F_e/D_e)} - 1} \\ a_W = \frac{F_w e^{(F_w/D_w)}}{e^{(F_w/D_w)} - 1} \\ B = a_P^{(0)} T_P^{(0)} + Sc \delta x \delta y \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho c_p \delta x \delta y}{\Delta t} \\ a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^{(0)} + F_e - F_w + F_n - F_s + b' \\ b' = Sp \delta x \delta y \end{array} \right.$$

Remarque

- Pour un problème stationnaire 1D ce schéma permet d'obtenir la solution exacte pour n'importe quelle valeur du nombre Péclet et n'importe quelle valeur du nombre de noeuds.
- Cependant, ce schéma est assez peu utilisé car : les exponentielles coûtent cher au calcul numérique, du coup il n'est pas exact pour les problèmes 2D, 3D, instationnaires et avec le terme source.

d) Schéma hybride

pour dépasser le problème des exponentielles rencontrées dans le schéma exponentiel, en faisant remplacer $F = PD$ dans les termes de (a_E, a_W, a_N, a_S) , par exemple ;

$$a_E = \frac{F_e}{e^{(F_e/D_e)} - 1}, \text{ on obtient } \frac{a_E}{D_e} = \frac{P_e}{e^{(P_e)} - 1}$$

Après avoir résolu la fonction $\left(\frac{a_E}{D_e}\right)$ en fonction de P_e , la solution est donnée dans la figure suivante ;

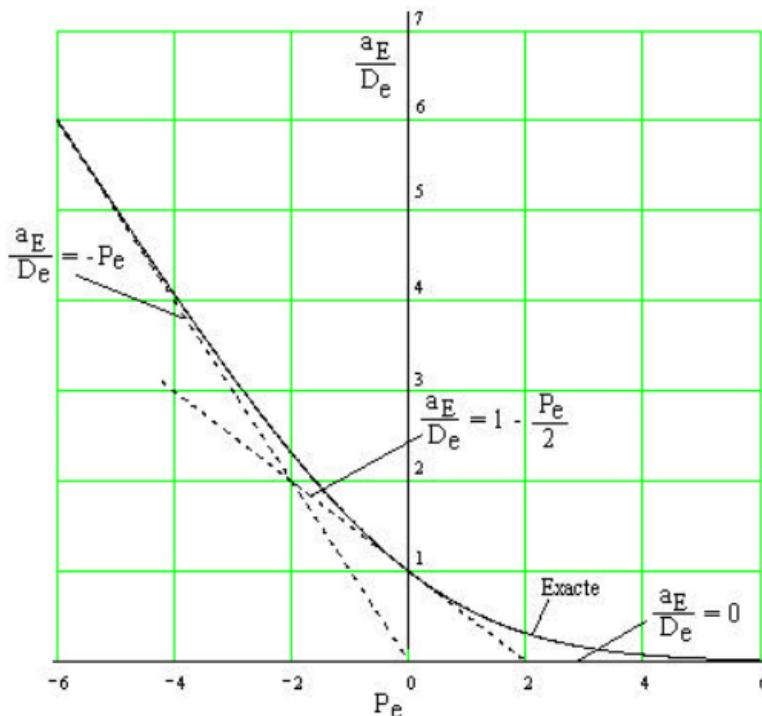


Figure : Variation du coefficient (a_E) en fonction du nombre de Péclet (P_e)

A partir de la figure on constate que le schéma hybride est une combinaison entre trois tangentes représentées sur la figure avec le schéma exacte;

- Si ($P_e > 2$) ; l'influence du terme $\left(\frac{a_E}{D_e}\right)$ baisse avec l'augmentation du nombre de Péclet(P). À la limite quand $P_e \rightarrow +\infty$ le terme $\left(\frac{a_E}{D_e}\right) \rightarrow 0$, Le schéma hybride est identique dans ce cas au schéma “upwind”
- Si ($-2 < P_e < 2$) ; le terme $\left(\frac{a_E}{D_e}\right) = 1 - \frac{P_e}{2}$, Le schéma hybride est identique dans ce cas au schéma “différence centrée”
- Si ($P_e < -2$) ; À la limite quand $P_e \rightarrow -\infty$ le terme $\left(\frac{a_E}{D_e}\right) \rightarrow -P_e$ Le schéma hybride est identique dans ce cas au schéma “upwind”

L'équation de convection-diffusion stationnaire 2D s'écrit :

$$-a_N T_N^{(1)} + a_P T_P^{(1)} - a_S T_S^{(1)} = a_E T_E^{(1)} + a_W T_W^{(1)} + B$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} a_N = \text{Max} \left(-F_n, D_n - \frac{F_n}{2}, 0 \right) \text{ ou } a_N = D_n \text{Max} \left(-P_n, 1 - \frac{P_n}{2}, 0 \right) \\ \\ a_S = \text{Max} \left(F_s, D_s + \frac{F_s}{2}, 0 \right) \text{ ou } a_S = D_s \text{Max} \left(P_s, 1 + \frac{P_s}{2}, 0 \right) \\ \\ a_E = \text{Max} \left(-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right) \text{ ou } a_E = D_e \text{Max} \left(-P_e, 1 - \frac{P_e}{2}, 0 \right) \\ \\ a_W = \text{Max} \left(F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right) \text{ ou } a_W = D_w \text{Max} \left(P_w, 1 + \frac{P_w}{2}, 0 \right) \\ \\ B = a_P^{(0)} T_P^{(0)} + Sc \delta x \delta y \\ \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho c_p \delta x \delta y}{\Delta t} \\ \\ a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^{(0)} + F_e - F_w + F_n - F_s + b' \\ \\ b' = Sp \delta x \delta y \end{array} \right.$$

e) Schéma Puissance (Power law)

Encore, c'est une amélioration du schéma hybride autour de $P = \pm 2$ tout en évitant le calcul des exponentielles, et qui s'étend jusqu'à $P = \pm 10$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } P_e < -10: \frac{a_e}{D_e} = -P_e \text{ (Upwind)} \\ \text{Pour } -10 < P_e < 0: \frac{a_e}{D_e} = (1 + 0.1 P_e)^5 - P_e \\ \text{Pour } 0 < P_e < 10: \frac{a_e}{D_e} = (1 + 0.1 P_e)^5 \\ \text{Pour } P_e > 10: \frac{a_e}{D_e} = 0 \text{ (Upwind)} \end{array} \right.$$

L'équation de convection-diffusion stationnaire 2D s'écrit :

$$-a_N T_N^{(1)} + a_P T_P^{(1)} - a_S T_S^{(1)} = a_E T_E^{(1)} + a_W T_W^{(1)} + B$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} a_N = D_n \operatorname{Max} \left(0, \left(1 - \frac{0.1 |F_{ne}|}{D_n} \right)^5 \right) + \operatorname{Max}(0, -F_n) \\ a_S = D_s \operatorname{Max} \left(0, \left(1 - \frac{0.1 |F_s|}{D_s} \right)^5 \right) + \operatorname{Max}(0, F_s) \\ a_E = D_e \operatorname{Max} \left(0, \left(1 - \frac{0.1 |F_e|}{D_e} \right)^5 \right) + \operatorname{Max}(0, -F_e) \\ a_W = D_w \operatorname{Max} \left(0, \left(1 - \frac{0.1 |F_w|}{D_w} \right)^5 \right) + \operatorname{Max}(0, F_w) \\ B = a_P^{(0)} T_P^{(0)} + Sc \delta x \delta y \\ a_P^{(0)} = \frac{\rho c_p \delta x \delta y}{\Delta t} \\ a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^{(0)} + F_e - F_w + F_n - F_s + b' \\ b' = Sp \delta x \delta y \end{array} \right.$$

f) Formulation générale des différents schémas

Les coefficients (a_E, a_W, a_N, a_S) peuvent se mettre sous forme générale :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = D_e A(|P_e|) + \text{Max}(-F_e, 0) \\ a_W = D_w A(|P_w|) + \text{Max}(F_w, 0) \\ a_N = D_n A(|P_n|) + \text{Max}(-F_n, 0) \\ a_S = D_s A(|P_s|) + \text{Max}(F_s, 0) \end{array} \right.$$

Ou la fonction $A(|P|)$ d'écrit le schéma utilisé

On aura ;

$$\text{Amont} \quad A(|P|) = 1$$

$$\text{Différences centrées} \quad A(|P|) = 1 - 0.5|P|$$

$$\text{Hybride} \quad A(|P|) = \text{Max}(0, 1 - 0.5|P|)$$

$$\text{Exponentiel} \quad A(|P|) = \frac{|P|}{e^{|P|} - 1}$$

$$\text{Puissance} \quad A(|P|) = \text{Max}(0, (1 - 0.1|P|)^5)$$

IV.1.2 Résolution du système d'équation linéaire par la méthode directe de DTMA

En suivant les mêmes démarches présentées dans le chapitre précédent

Remarque

En 3D, la méthode de DTMA suit les mêmes démarche en 2D sauf que en ajoute les nœuds de l'axe Z comme suit ;

On calcule les nœuds de la colonne (1) pour Z=1; en annulant les nœuds en voisinage des autres colonnes, puis passant à la colonne (2) pour Z= 1, colonne (3) pour Z=1 jusqu'à la colonne (n) pour Z=1, puis passant à la colonne (1) pour Z=2, et ainsi de suite jusqu'à Z=n

chaque point du maillage est intégré en fonction du temps L'intégration du terme de diffusion en fonction du temps est

2- Choix du schéma par rapport au temps ;

Suivant la formule mathématique :

(I) : on varie le temps pour $T_p^{(0)}$, puis $T_p^{(0)}$ pour t_1

$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) dx = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\lambda_e \frac{dT}{dx} \Big|_e - \lambda_w \frac{dT}{dx} \Big|_w = 0$$
$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\lambda_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x_e} - \lambda_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x_w} &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ \left(\frac{\lambda_e}{\Delta x_e} \right) T_E - \left(\frac{\lambda_e}{\Delta x_e} + \frac{\lambda_w}{\Delta x_w} \right) T_P + \left(\frac{\lambda_w}{\Delta x_w} \right) T_W &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ -a_w T_W + a_p T_P - a_e T_E &= 0\end{aligned}$$

Exercice 2

On considère une plaque barre cylindrique, sans source de chaleur, ayant l'aire transversale $A=10^{-2} \text{ m}^2$ et la longueur $L=0.5\text{m}$. L'extrémité A est maintenue à une température constante de 100°C , tant dit que l'extrémité B est considéré isolée.

Calculer la distribution de la température le long de la barre pour 6 points. On connaît la conductivité thermique $\lambda = 1000\text{W/mk}$.

Exercice 3

On considère une plaque barre cylindrique, sans source de chaleur, ayant l'aire transversale $A=10^{-2} \text{ m}^2$ et la longueur $L=0.5\text{m}$. L'extrémité A est maintenue à un flux imposé de $Q = 500 \text{ KW/m}^2$, tant dit que l'extrémité B est considéré isolée.

Calculer la distribution de la température le long de la barre pour 6 points. On connaît la conductivité thermique $\lambda = 1000\text{W/mk}$.

Exercice 4

On considère une plaque très longue d'épaisseur $L=20\text{mm}$, ayant la conductivité thermique constante $\lambda = 0.5\text{W/mK}$ et une source de chaleur uniforme, $S=1000 \text{ KW/m}^3$.

Les faces de la plaque se trouvent à la température constante de 100°C et 200°C respectivement.

En supposant que les dimensions de la plaque dans les directions y et z soient très grandes et donc le gradient de la température est significatif dans la direction x seulement.
1- Calculer la distribution de la température pour 6 points du maillage.