

Chapitre 6 : Observateur d'état et commande par retour de sortie des systèmes multivariables

1. Introduction

Dans le chapitre précédent, on a étudié le problème de la commande par retour d'état en supposant la disponibilité (à la mesure) de toutes les variables d'état. Mais, Souvent pour des raisons de l'indisponibilité technique du capteur, de son coût, etc..., le nombre de grandeurs d'état pouvant être mesurées par des capteurs est inférieur à celui du vecteur d'état (c.-à-d., qu'il y a des grandeurs d'état non mesurables). Dans ce cas la synthèse d'une loi de commande par retour d'état est alors compromise. On pose ainsi le problème de la synthèse d'un algorithme reconstituant le vecteur d'état, sur la base de la connaissance sur un intervalle de temps, d'une part de l'entrée du système et d'autre part de sa sortie (devant être mesurables); c'est le problème de *l'observation*. Cette reconstitution ou estimation de l'état courant devant faite en temps réel, l'observateur revêt usuellement la forme d'un système dynamique auxiliaire.

2. Définition et principe

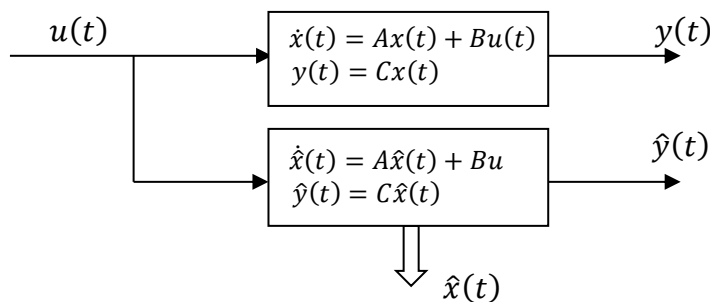
On appelle observateur un système dynamique capable de reproduire (ou estimer) les états non mesurables d'un système à partir de la seule connaissance de l'entrée et la sortie du système et éventuellement les états mesurables.

2.1 Observateur en boucle ouverte : Soit le système d'ordre n défini par :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (1)$$

L'observateur est défini par :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}$$



Observateur d'état en boucle ouverte.

2.1.1 Erreur d'observation : L'erreur d'observation est :

$$\begin{aligned}e(t) &= x(t) - \hat{x}(t) \\ \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{e}(t) &= Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) \\ &= A(x(t) - \hat{x}(t)) = Ae(t) \\ \Rightarrow e(t) &= e(0)e^{At}\end{aligned}$$

Si la partie réelle des valeurs propres de A est négative (système stable), alors, l'erreur d'observation converge vers zéro.

Remarque: On remarque que l'observateur et le système ont la même dynamique (ont les mêmes pôles), alors que *la dynamique d'un observateur doit être plus rapide que celle du système à observer* afin de pouvoir l'insérer dans la boucle de commande.

2.2 Observateur en boucle fermée : Soit le système d'ordre n défini par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

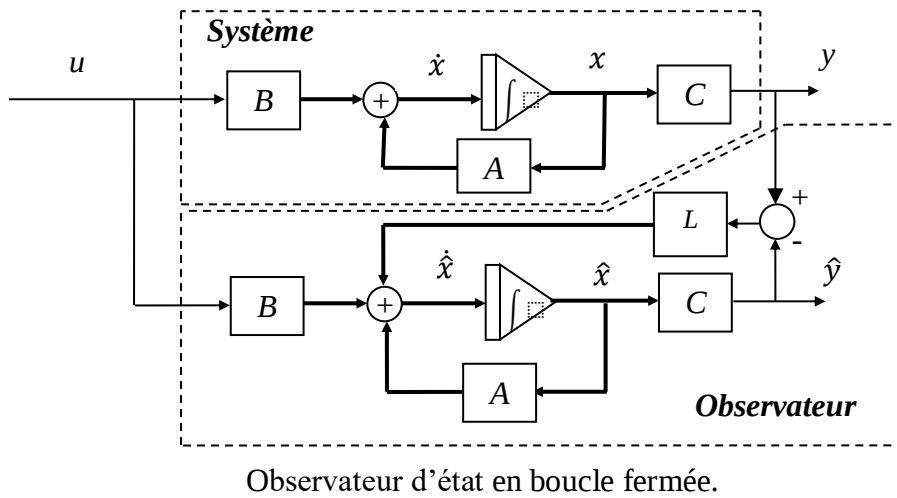
$$y(t) = Cx(t)$$

L'observateur en boucle fermée est défini par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y}) \quad (2)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (3)$$

Où $L(y - \hat{y})$ est un terme de correction, L est un vecteur colonne de dimension n



En remplaçant (3) dans (2) on obtient :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly$$

On remarque que la matrice d'état de l'observateur est $(A - LC)$, donc on peut influencer la dynamique (stabilité et rapidité) de l'observateur en agissant sur le vecteur L (désigné par l'opérateur).

2.2.1 Erreur d'observation

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$$

$$\dot{e}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - L(y - \hat{y})$$

$$\dot{e}(t) = A[x(t) - \hat{x}(t)] - LC(x - \hat{x})$$

$$\dot{e}(t) = \underbrace{(A - LC)}_{A_{ob}}(x - \hat{x}) = (A - LC)e(t)$$

$$\dot{e}(t) = A_{ob}e(t)$$

La dynamique de l'erreur d'observation est la sortie d'un système du premier ordre stable imposé par l'utilisateur (en utilisant L), donc l'erreur d'observation tend asymptotiquement vers zéro. $e(t) = e(0)e^{(A-LC)t}$, après un régime transitoire l'observateur suit correctement l'évolution du système à commander.

3. Commande par retour d'état avec observateur

3.1 Cas particulier : Systèmes monovariables

Le principe de la commande par retour d'état avec observateur consiste à utiliser l'état estimé par un observateur pour ensuite construire un retour d'état comme le montre sur la fig.6.4 :

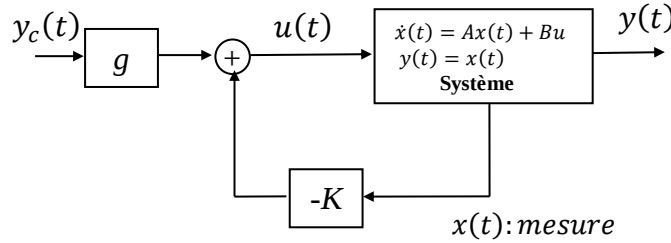


Fig.6.3. Schéma de principe de la commande par retour d'état.

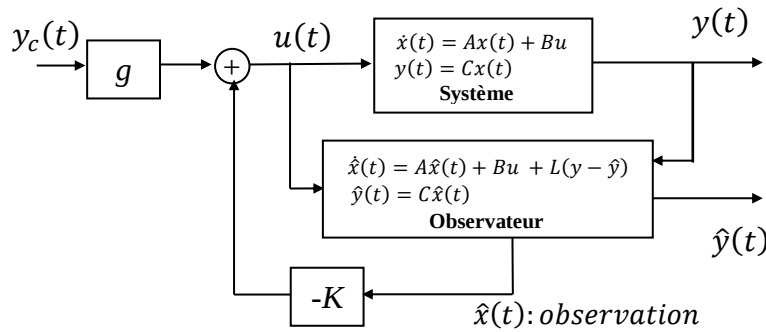


Schéma de principe de la commande par retour d'état avec d'observateur.

Soit le système monovariante d'ordre n :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4)$$

avec l'observateur :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Le retour d'état avec observateur est :

$$u(t) = g y_c(t) - K \hat{x}(t) \quad (6)$$

En remplaçant (6) dans (4) et (5) : pour la clarté des expressions, on omet la variable t .

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x} + Bgy_c \quad (7)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - BK\hat{x} + Bgy_c + LC(x - \hat{x}) \quad (8)$$

On met (7) et (8) sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{A_G} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} gy_c \quad (9)$$

$A_G = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix}$ est la matrice d'évolution globale (système+observateur)

1^{ère} colonne = 1^{ère} colonne + 2^{ème} colonne :

$$A_G = \begin{bmatrix} A - B K & -B K \\ A - B K & A - B K - L C \end{bmatrix}$$

2^{ème} ligne = 2^{ème} ligne - 1^{ère} ligne :

$$A_G = \begin{bmatrix} A - B K & -B K \\ 0 & A - L C \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique du système global est :

$$\det[sI - (A - B K)] \times \det[sI - (A - L C)] = 0$$

$$|sI - (A - B K)| \times |sI - (A - L C)| = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} |sI - (A - B K)| = 0 \\ |sI - (A - L C)| = 0 \end{cases}$$

$(A - B K)$: matrice dynamique du système bouclé.

$(A - L C)$: matrice dynamique de l'observateur.

3.1.1 Théorème de séparation

La dynamique du système global est constituée par la dynamique due au retour d'état plus celle due à l'observateur. Donc, le vecteur K (gain de commande) et le vecteur L (gain d'observateur) se calculent indépendamment (séparément).

Calcul de K (déjà fait au chapitre précédent)

Calcul de L :

Dans la base initiale, on a

$$\text{Système : } \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$\text{Observateur : } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

$$\text{Observateur : } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

La matrice d'évolution de l'observateur : $A_{obs} = A - LC$, où $L = [l_0 \quad l_1 \quad \dots \quad l_{n-1}]^T$.

Afin de faciliter le calcul de L , il faut soit :

- Mettre le système sous forme compagne d'observabilité et développer un nouveau algorithme de calcul de L , ou
- Mettre le système dual sous la forme compagne de commandabilité et utiliser le même algorithme de calcul de K (en se basant sur le principe de dualité). On utilise cette méthode.

Soit un système à commander :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

L'observateur en BF est défini par :

$$\begin{aligned}\hat{\dot{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}$$

L'on dispose d'un spectre désiré pour l'observateur (n pôles désirés de l'observateur en BF)

Etape 1: système dual: $S^* (A^* = A^T, B^* = C^T, C^* = B^T)$

Etape 2: Mettre système dual sous forme compagne de commandabilité (M^{*-1}, M^*): $\tilde{S}^*(\tilde{A}^*, \tilde{B}^*, \tilde{C}^*)$
ici on utilise l'algorithme 3.1 vu dans le chapitre 3

Etape 3: calcul du retour d'état dans la base canonique $\tilde{K}^*$ (Algorithme de placement de pôles) : ici on utilise l'algorithme 5.1 vu dans le chapitre 5.

Etape 4: calcul du retour d'état $K^* = \tilde{K}^* M^{*-1}$

Etape 5: calcul de $L = K^{*T}$

Exemple : Soit un système donné :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y(t) &= [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Concevoir un observateur d'état ayant en boucle fermée le pôle double $p = -5$.

3.2 Cas général : Systèmes multivariables

Algorithme 6.2 : Calcul de l'observateur L – décomposition en p sous-systèmes observables (en utilisant l'algorithme de calcul de K)

Soit un système donné:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

L'on dispose de n pôles désirés pour l'observateur d'état : $\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y})$

Etape 1: système dual: $S^* (A^* = A^T, B^* = C^T, C^* = B^T)$

Etape 2: on décompose le système dual en $m = p$ sous-système commandables $(\tilde{A}^*, \tilde{B}^*, \tilde{C}^*)$: ici on utilise l'algorithme 3.4 commandables vu dans le chapitre 3.

Etape 3: calcul du retour d'état dans la base canonique $\tilde{K}^*$ (Algorithme de placement de pôles) : ici on utilise l'algorithme 5.3 vu dans le chapitre 5)

Etape 4: calcul du retour d'état $K^* = \tilde{K}^* M^{*-1}$

Etape 5: calcul de $L = K^{*T}$