Travaux pratiques N°4

APPLICATION :
COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT AVEC OBSERVATEUR D'UN PENDULE INVERSE

Préliminaires et modélisation du pendule inversé

Dans ce TP on propose d'appliquer la commande par retour d'état à un système instable en BO, à savoir le pendule inversé. Ce choix est justifié par le caractère spectaculaire de ce système qui constitue un bon benchmark pour la validation des différentes approches de commande. Le pendule inversé est constitué d'une barre portant une masse à son extrémité libre, et tourne librement autour d'un axe horizontal solidaire d'un chariot se déplaçant sur un rail de guidage. La motorisation du chariot est assurée par un moteur à courant continu (figure.1)

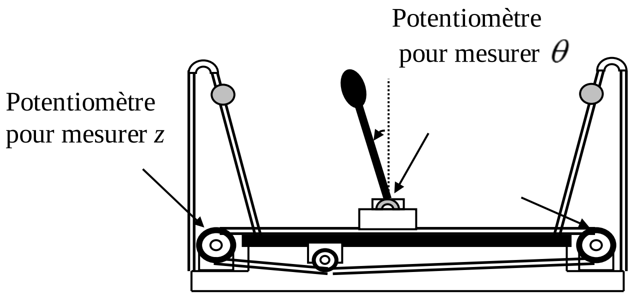

Figure 1 Maquette du pendule inversé

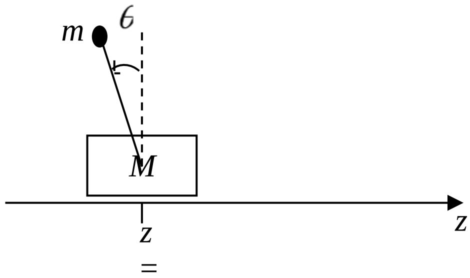

Figure 2: Modèle simplifié du pendule inversé

La commande du système se fait par la tension aux bornes du moteur d'entraînement du chariot. La prise en compte simultanée des modes électriques et mécaniques du pendule inversé, permet de modéliser son comportement dynamique. L'utilisation des séries de Taylor du premier ordre réduit la complexité du modèle, et permet d'aboutir au modèle linéaire suivant:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \dot{x}_4(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{-1}{RM}\left(K_mK_g\right)^2 & \dfrac{-mg}{M} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \dfrac{1}{RMl}\left(\dfrac{K_mK_g}{r}\right)^2 & \dfrac{(M+m)g}{Ml} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{K_mK_g}{rRM}\\ 0\\ \dfrac{-K_mK_g}{rRMl}\end{bmatrix}u(t),\qquad y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix}$$

Avec les paramètres: M : masse du chariot / m: masse du pendule / l : longueur de la tige / g : pesanteur / R : résistance d'induit du moteur d'entraînement du chariot / K_m: constante de flux du moteur/ K_g : rapport de réduction / r : rayon de la poulie qui entraîne le chariot.

En remplaçant par les paramètres par leurs valeurs numériques, on obtient:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \dot{x}_4(t)\end{bmatrix}}_{\dot{X}(t)}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -16 & -4.53 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 52.46 & 47.06 & 0\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix}}_{X(t)}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 3.78\\ 0\\ -12.39\end{bmatrix}}_{B}u(t),\qquad y(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix}}_{X(t)}$$

L'état X du système est représenté par les variables $X=\left[z\quad \dot{z}\quad \theta\quad \dot{\theta}\right]^T$, où $z, \dot{z}, \theta$ et $\dot{\theta}$ représentent respectivement la position du chariot, la vitesse du chariot, l'angle du pendule par rapport à l'axe vertical et la vitesse angulaire du pendule. Le vecteur de sortie est formé par la position du chariot z sur la course et l'angle θ que fait le pendule avec la verticale.

PARTIE 1 : SIMULATION DU COMPORTEMENT DU PENDULE INVERSE EN BO

Objectif : Le système est stable si la position du chariot z se stabilise autours d'une valeur donnée et l'angle θ se stabilise autours de zéro.

Q1 : Ecrire un programme qui simule le comportement du système en BO, c-à-d, tracer la réponse indicielle du système en BO ($x_1(t)$ et $x_3(t)$) avec CI : $X_0 = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$. Que constatez-vous ?

PARTIE 2 : COMPORTEMENT EN BF : COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT SANS OBSERVATEUR

Q1 : Peut-on appliquer la commande par retour d'état à base d'observateur (cas SISO) au modèle du système tel qu'il est. Si la réponse est non, proposer une solution sachant que l'objectif de commande est de stabiliser la position z et l'angle θ autours de zéro en utilisant une commande par retour d'état : $u(t) = g\, y_c(t) - K\, X(t)$.

Q2- Ecrire un programme qui permet de simuler le comportement du système avec un retour d'état (sans observateur) en imposant les pôles du système en BF : $p_1 = -1, p_2 = -2, p_2 = -3.$

Figures à montrer : position du chariot $x_1(t)$, angle du pendule $x_3(t)$ et le signal de commande $u(t)$

Q3 : Que constatez-vous ?

Procédure: Partez de votre programme de la mise sous forme CC (TP3).

PARTIE 3 : COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT AVEC OBSERVATEUR

Q1-Ecrire un programme qui permet de simuler le comportement du système avec un retour d'état avec observateur $u(t) = -K\,\hat{X}(t)$, en imposant les pôles du système en BF : $p_1 = -1, p_2 = -2, p_2 = -3.$ On suggère pour l'observateur $\dot{\hat{X}}(t) = A\hat{X}(t) + Bu(t) + LC(X - \hat{X})$ une dynamique 2 fois plus rapide que celle du système en BF.

Figures à montrer : position réelle et position estimée $x_1(t)$ et $\hat{x}_1(t)$ sur le même graphique.
Angle réel et angle estimé $x_3(t)$ et $\hat{x}_3(t)$ sur le même graphique.
Erreur d'estimation de la position $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$
Erreur d'estimation de l'angle $e_3(t) = x_3(t) - \hat{x}_3(t)$ et le signal de commande $u(t)$

Procédure: Ajoutez La partie de la mise sous forme observable (TP 3) au programme de la partie 2 et recommencez.

Q2- Essayer une dynamique de l'observateur 10 fois mois rapide que celle du système en BF.

Q3- Essayer une dynamique de l'observateur 10 fois plus rapide que celle du système en BF.

Q4- Que constatez-vous ? Conclure.

Quelques commandes MATLAB à utiliser :

- Récupération de la j$^{\text{ième}}$ ligne d'une matrice A : **V=A(j,:)**
- Récupération d'une partie d'un vecteur : **V1=V(i:j)**
  V1 est la partie du vecteur V constituée du i$^{\text{ième}}$ jusqu'au j$^{\text{ième}}$ élément de V
- Pour faire pivoter les éléments d'un vecteur V : **V1=fliplr(V)**
  V1 est le vecteur obtenu en inversant l'ordre (de gauche à droite) des éléments de V
- Récupération des coefficients (rangés dans un vecteur D) d'un polynôme dont les racines sont rangées dans un vecteur P : **D=poly(P)**
  Exemple : soit un polynôme (s+1)(s+3)(s+5)(s+7)=s^4+16s^3+86s^2+176s+105

```
>> P=[-1 -3 -5 -7];
>> D=poly(P)

D =  1    16    86   176   105
```

```
clear all
A=[0 1 0 0;0 -16 -4.53 0;0 0 0 1;0 52.46 47.06 0];
B=[0 3.78 0 -12.39]';
C=[1 0 0 0
   0 0 1 0];
% initialisation
x=[1 1 1 1]';
T=[];
X=[];
U=[];
h=0.01;
```

```
%boucle de calcul
for t=0:h:10
    u=1;
    x=x+(A*x+B*u)*h;
    T=[T t];
    X=[X x];
    U=[U u];
end
% visualisation des sorties
figure(1)
%position du chariot
plot(T,X(1,:))
figure(2)
%Angle téta
plot(T,X(3,:))
```