CHAPITRE 1 : *Les régimes transitoires*

Sommaire des régimes transitoires

Les régimes transitoires

I) Introduction

I.1) Définitions:

I.1.1) Régime stationnaire:

Un régime stationnaire est caractérisé par des grandeurs indépendantes du temps. Un circuit en courant continu est donc en régime stationnaire. Un régime transitoire est le passage entre deux états stables d'un système.

I.1.2) Régime variable:

Régime dans lequel ces grandeurs dépendent du temps; elles sont notées par des lettres minuscules v(t), i(t)…

I.1.3) Régime permanent:

Régime dans lequel ces grandeurs peuvent dépendre du temps, les variations étant permanentes au cours du temps; exemple : régime permanent sinusoïdal.

I.1.4) Régime transitoire:

Généralement régime qui précède l'établissement du régime permanent dans un circuit électrique. Il décrit l'état intermédiaire d'un circuit électrique évoluant entre deux états permanents stables.
Il s se caractérisent par la résolution d'équations différentielles.

I.1.5) Ordre d'un système:

L'étude des régimes transitoires portera sur des systèmes linéaires :
Si $e_1 \rightarrow s_1$ et $e_2 \rightarrow s_2$ alors $\alpha\, e_1 + \beta\, e_2 \rightarrow \alpha\, s_1 + \beta\, s_2$ (avec α et β deux réels)

Les systèmes physiques sont caractérisés par des équations différentielles liant les entrées et la sortie

On caractérise l'ordre d'un système par la dérivée d'ordre maximum de l'entrée dont dépend la sortie

Si $a_n \dfrac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \dfrac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \dfrac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = f(t)$ le système est d'ordre n

Pratiquement l'ordre n est tel que le déphasage de l'entrée par rapport à la sortie est $n\times 90°$

I.1.6) Méthodes d'analyse d'un régime transitoire:

I.1.7) Analyse de l'équation différentielle:

Si l'analyse de l'équation différentielle est facile l'analyse classique sera abordable.
La solution de l'équation différentielle est la **somme** de

- l'équation générale sans second membre (**SGESSM**) correspondant au **régime libre** (sans excitation : cette réponse est due à l'énergie emmagasinée dans le système)
- de la solution particulière (**SP**) correspondant au **régime forcé (réponse du système à l'excitation)**

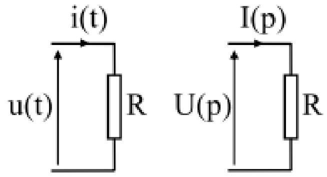
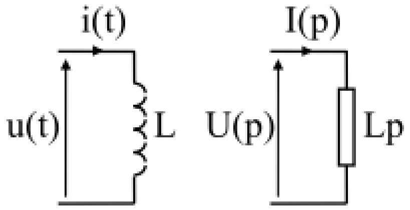
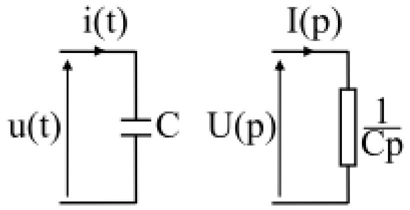
Rq : Si l'excitation est continue ou en échelon, le régime forcé est continu. Si l'excitation est sinusoïdale, de pulsation ω, le régime forcé est sinusoïdal de même pulsation ω.

I.1.8) Analyse de la transformée de Laplace de l'équation différentielle:

Dans les cas où l'étude mathématique de l'équation différentielle est complexe l'analyse par l'intermédiaire de la transformation de la Laplace du système sera préférable.
En effet la transition d'un système est une fonction causale (grandeurs du système « nulle »s avant t=0) faisant intervenir les grandeurs d'entrée et sortie et leurs dérivées.
L'avantage de la transformée de Laplace réside dans le fait que la résolution d'un système d'équation différentielles se transforme en la résolution d'une fonction polynomiale.

On écrira $\dfrac{df(t)}{dt} \rightarrow pF(p)$ et $\int f(t)dt \rightarrow \dfrac{1}{p}F(p)$ si et seulement si $f(0)=0$ et $f'(0)=0$

I.1.9) Transformations élémentaires:

Schéma	Relation temporelle	Laplace
	$u(t) = R \cdot i(t)$	$U(p) = R \cdot I(p)$
	$u(t) = L \cdot \dfrac{di(t)}{dt}$	$U(p) = L \cdot p \cdot I(p) - L \cdot i(0)$
	$i(t) = C \cdot \dfrac{du(t)}{dt}$	$I(p) = C \cdot p \cdot U(p) - C \cdot u(0)$

II) Régimes transitoires du premier ordre

II.1) Equation différentielles du premier ordre à coefficients constants :

II.1.1) Définition

Une équation différentielle est une relation qui peut s'écrire :

- En mathématique $\boxed{a\dfrac{dy}{dt}+by=f(t)}$ ① (ou a y' + b y = f(t)) dans laquelle a est une constante réelle non nulle, b est une constante réelle et y une fonction inconnue (que l'on cherche à déterminer) et f une fonction continue.
- En physique $a\times\dfrac{ds(t)}{dt}+b\times s(t)=e(t)$ avec e(t) la grandeur d'entrée (grandeur d'excitation) d'un système et s(t) sa grandeur de sortie (grandeur observée , que l'on souhaite maitriser)

L'équation :

$\boxed{a\dfrac{dy}{dt}+by=0}$ ② est appelée équation sans second membre associée à ①

On mettra avantageusement l'expression ci-dessus sous la forme $\boxed{\underset{a/b}{\tau}\dfrac{dy}{dt}+y=\underset{1/b}{k}\times f(t)}$ de façon à faire apparaitre la constante de temps du système τ et le gain k traduisant la proportionnalité entre l'entrée et la sortie du système en régime établi.

II.1.2) Résolution de l'équation sans second membre ② : SGESSM (Solution Générale de l'Equation Sans Second Membre)

On pose souvent $\dfrac{a}{b}=\tau$ où τ est appelée constante de temps.

Si l'on se sert des résultats classiques de mathématique	Si l'on redémontre
$\tau\dfrac{dy}{dt}+y=0$ La solution de l'équation caractéristique : $r+\dfrac{1}{\tau}=0$ soit $r=-\dfrac{1}{\tau}$ La SGESSM ② est $y(t)=Ke^{-\frac{b}{a}\cdot t}$ où K est une constante réelle arbitraire. La constante sera trouvée grâce aux conditions initiales.	$\tau\dfrac{dy}{dt}+y=0$ $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{1}{\tau}dt$ $\int\tau\dfrac{dy}{y}=\int-1\cdot dt$ $\ln y+c^{te}=-\dfrac{t}{\tau}$ si on pose $c^{te}=-\ln K$ $\ln\dfrac{y}{K}=-\dfrac{t}{\tau}\Rightarrow e^{\ln\frac{y}{K}}=e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\Rightarrow y=Ke^{-\frac{t}{\tau}}$

II.1.3) Résolution de l'équation avec second membre ① : SP (Solution Particulière)

Dans les cas les plus courants on recherchera une solution particulière de ① du même type que la fonction f(t) apparaissant au second membre de ①

II.1.4) Solution globale

C'est la somme de la **SGESSM + SP**

Donc si l'on connaît une solution particulière $y_0(t)$ de l'équation ① alors la solution générale de ① est :

$$\boxed{y(t)=Ke^{-\frac{t}{\tau}}+y_0(t)}$$

II.1.5) Détermination des constante

La constante K est déterminée à l'aide d'une condition dite « condition initiale » .
Dans de nombreux cas cette condition représente la valeur de la fonction y à t=0 (ou y'(0))

Exemples de conditions initiales fréquemment rencontrées :

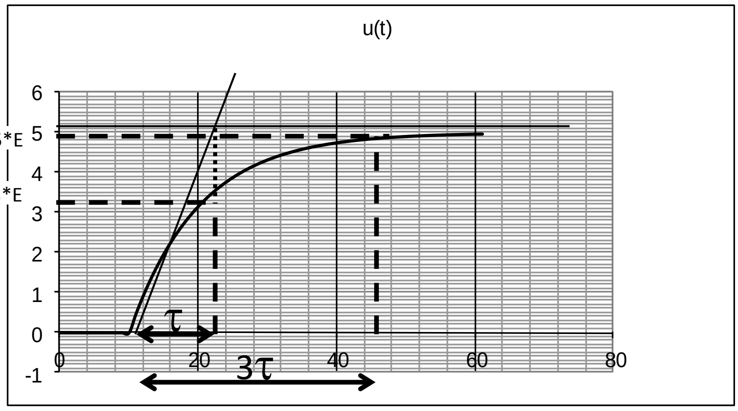
- Pour une bobine où le courant ne passait pas $i_L(0^+)=0$ car la bobine « lisse » le courant.
- Pour un condensateur où la tension était nulle $u_C(0^+)=0$ car le condensateur « lisse » la tension.
- Pour un moteur initialement à l'arrêt $\Omega_{MCC}(0^+)=0$ car l'inertie du moteur oblige qu'il y ait une accélération progressive.

II.1.6) Rappels sur la fonction exponentielle et ses valeurs particulières

Etudions les valeurs particulières de cette fonction de façon à pouvoir retrouver sur un oscillogramme la valeur de la constante de temps.
Calculons la valeur de $(1-e^{-t/\tau})$ pour τ et 3 τ

t=τ	$e^{-t/\tau}$ ≈0.37	$(1-e^{-t/\tau})$ =0.63
t=3τ	$e^{-t/\tau}$ ≈0.05	$(1-e^{-t/\tau})$ =0.95

- Donc pour trouver la valeur de τ il suffit de trouver sur le signal étudié la valeur telle que y(t) soit égale à 95% ou 63% de sa valeur max et de regarder à quel temps correspond cette valeur pour en déduire τ (ou 5% et 37% du max pour une décroissance) On définit le **temps de réponse : $t_{r5\%min}$** : le temps au bout duquel la tension u ne diffère que de 5% de sa valeur finale donc **$t_{r5\%min}$= 3 τ**
- Une autre méthode consiste à tracer la tangente à l'origine de la courbe ainsi que la droite asymptotique, l'écart temporel entre leur intersection et l'origine de la courbe est égal à τ
- On définit parfois le temps de montée t_m comme le temps de passage de 10% à 90% de la valeur max : 2,2τ



II.2) Réponse d'un système du premier ordre en régime harmonique: fonction de transfert isochrone

La fonction de transfert isochrone permet de connaitre la réponse d'un système à un stimulus sinusoïdal.

Comme $\tau\dfrac{ds(t)}{dt}+s(t)=k\times e(t)$.

Si e(t) est de la forme $e(t)=E\sqrt{2}\sin\omega t$ le système étant linéaire la sortie sera elle aussi sinusoïdale $s(t)=S\sqrt{2}\sin\omega t$.
On peut alors avantageusement décrire e(t) par sa forme complexe $\underline{e}$, il en sera de même pour s qui prendra la notation $\underline{s}$ et si l'on dérive s $\dfrac{ds(t)}{dt}\rightarrow j\omega\times\underline{s}$

En effet

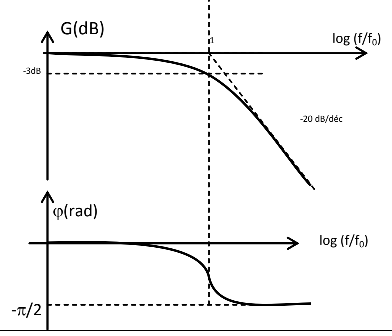
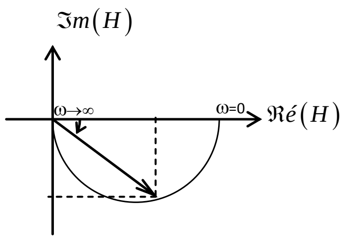
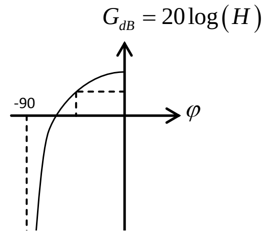
$$\left(\begin{array}{l}\dfrac{ds(t)}{dt}=\dfrac{d\left(S\sqrt{2}\sin\omega t\right)}{dt}=S\sqrt{2}\dfrac{d\sin\omega t}{dt}=S\sqrt{2}\times\omega\times\cos\omega t=S\sqrt{2}\times\omega\times\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)\\ donc\ \dfrac{ds(t)}{dt}=\omega\times S\sqrt{2}\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)\\ donc\ \dfrac{ds(t)}{dt}\rightarrow j\omega\times\underline{s}\end{array}\right)$$

L'équation différentielle $\tau \dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = k \times e(t)$ devient alors $\tau j\omega \times \underline{s} + \underline{s} = k \times \underline{e}$

Sa fonction de transfert $\underline{H}\left(j\omega\right) = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$ apparait donc complexe avec comme variable ω.

$$\underline{e} \longrightarrow \boxed{\underline{H}\left(j\omega\right) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{k}{1 + j\tau\omega}} \longrightarrow \underline{s}$$

Les diagrammes correspondants sont les suivants dans les divers plans classiquement utilisés

Diagramme de Bode $G = 20\log\lvert H\rvert$	***Diagramme de Nyquist***	***Diagramme de Black***
		

II.3) Notation en variables de Laplace: : fonction de transfert isomorphe d'une équation différentielle du premier ordre

II.3.1) Etablissement de la transformée de Laplace d'une équation différentielle du premier ordre :fonction de transfert

Nous avons vu que l'équation différentielle d'un système du premier ordre se présente sous la forme $\tau \dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = k \times e(t)$

Si $\Lambda\left[s(t)\right] = S(p)$ et $\Lambda\left[e(t)\right] = E(p)$ et comme $\Lambda\left[s'(t)\right] = = \Lambda\left[\dfrac{ds(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$

Alors l'équation différentielle devient : $\tau pS(p) + S(p) = k \times E(p)$ soit $\boxed{H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{k}{1+\tau p}}$

II.3.2) Traitement du problème :

Pour savoir comment répond le système du premier ordre, il faut appliquer une « commande » en entrée et connaitre sa transformée de Laplace puis utiliser les tables de transformées de Laplace inverses pour connaitre la sortie.

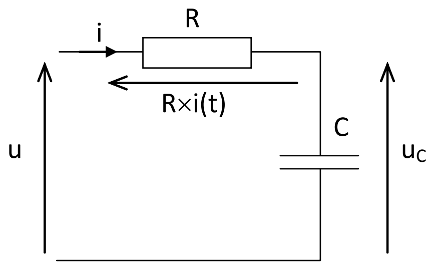
I.1.1.1) Traitement du problème :

$S(p) = \dfrac{k}{1+\tau p} E(p)$	Entrée Echelon : $e(t)\begin{cases} 0 \ si \ t<0 \\ E \ si \ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow E(p) = \dfrac{E}{p}$	$S(p) = \dfrac{k}{1+\tau p}\dfrac{E}{p} \Rightarrow s(t) = kE\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$
	Entrée Rampe : $e(t)\begin{cases} 0 \ si \ t<0 \\ E \times t \ si \ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow E(p) = \dfrac{E}{p^2}$	$S(p) = \dfrac{k}{1+\tau p}\dfrac{E}{p^2} \Rightarrow s(t) = kE\tau\left(e^{-t/\tau} + \dfrac{t}{\tau} - 1\right)$

En effet $S(p) = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p^2} + \dfrac{C}{(1+\tau p)}$ donc $\begin{cases} A = -kE\tau \\ B = kE \\ C = kE\tau^2 \end{cases}$ donc $s(t) = -kE\tau + kE \times t + kE\tau^2 e^{-t/\tau} = kE\left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau}\right)$

II.4) Exemple 1 : Charge et décharge d'un condensateur:

II.4.1) Etablissement de l'équation différentielle :



u(t) est une tension périodique, en créneaux, de rapport cyclique α = 0,5 .
Considérons l'instant où le signal u(t) passe de 0 à la valeur maximale de u soit E.

Le courant dans un condensateur est $i(t) = C\dfrac{du_c}{dt}$.

La loi des mailles donne $u(t) - Ri(t) - u_c(t) = 0$

En remplaçant i(t) , faire apparaître l'équation différentielle relative à la tension u_C

$\boxed{u(t) = \underbrace{RC}_{\tau}\dfrac{du_c}{dt} + u_c}$ soit $\boxed{\tau\dfrac{du_c}{dt} + u_c = u(t)}$

Le produit RC est une constante caractérisant le circuit, appelée constante de temps notée τ , elle s'exprime en secondes .

II.4.2) Résolution de l'équation différentielle :

II.4.2.1) Solution générale de l'équation sans second membre (SGESSM) :

La résolution de cette équation différentielle passe d'abord par la résolution de l'équation différentielle sans second membre.

$$\tau\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

On sait d'après le formulaire de mathématique que la solution de cette équation est :

$u_c = Ae^{-t/\tau}$ A étant une constante que l'on déterminera plus tard

Il nous faut maintenant trouver une solution particulière à l'équation différentielle (On prend en général une fonction qui a la même forme que u(t)). U(t) étant constante sur les intervalles donnés (T/2) , la solution particulière sera donc une constante.
La solution de cette équation différentielle est donc de la forme :

$$\boxed{u_c(t) = Ae^{-t/\tau} + B} \quad ①$$

II.4.2.2) Recherche d'une solution particulière (SP), détermination des constantes :

.Cette solution particulière dépend du signal u(t) auquel est soumis le circuit.
La solution générale est la somme de la SGESSM et de la SP.

- ***Si u(t) est un signal en échelon : : le signal u(t) passe de 0 à E à t=0 puis de E à 0 à T/2***

La SGESSM est toujours de la même forme : $u_{c1}(t) = Ae^{-t/\tau} + B$

La solution particulière (SP) est une constante $u_{c2}(t) = B'$

donc la solution générale est $u_c(t) = Ae^{-t/\tau} + B''$ avec (B''=B+B')

Les constantes A et B se déterminent en écrivant un système d'équations issu des valeurs connues de u_c

<table>
<tr>
<td>Charge</td>
<td>
Considérons le cas suivant : le signal u(t) passe de 0 à E à t=0.
L'équation différentielle est la suivante : $\tau\dfrac{du_c}{dt} + u_c = E$
La tension du condensateur était nulle précédemment, ce qui correspond à la charge du condensateur.
• A t=0 $u_c(0) = 0 = A + B''$ ce qui donne dans l'équation ① u_c=A+B''=0 $\Rightarrow$ A=-B''
• A t=∞ (on suppose pour l'instant que le signal n'est pas un créneau mais juste un échelon de tension de grandeur E) , donc et comme au bout d'un temps très long le condensateur est chargé complètement il prend donc la valeur de la tension d'alimentation : E donc $Ae^{-\infty/\tau} = 0$ soit $u_c(\infty) = B'' = E$
• Au final A=-B''=-E , remplaçons ces deux résultats dans l'équation ①
On obtient : $\boxed{u_c = -Ee^{-t/\tau} + E = E(1 - e^{-t/\tau})}$
</td>
</tr>
</table>

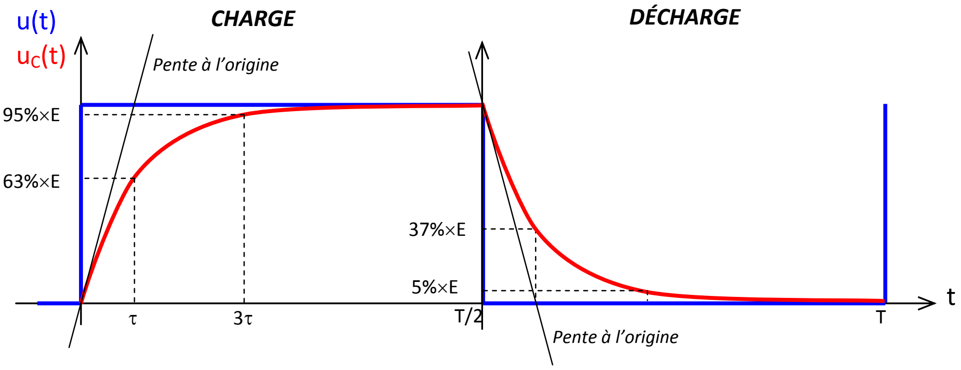
Décharge

Considérons la phase suivante : le signal u(t) passe de E à 0 à t=0 (en changeant d'origine).

L'équation différentielle est la suivante : $\tau \dfrac{du_c}{dt} + u_c = 0$

La tension du condensateur était égale à E précédemment, ce qui correspond à la décharge du condensateur.

- A t=0 u_c=E ce qui donne dans l'équation ① u_c=A+B''=E
- A t=∞ (on suppose pour l'instant que le signal n'est pas un créneau mais juste un échelon de tension de grandeur E) , $Ae^{-t/\tau}$ =0 donc u_c=B'' et comme au bout d'un temps très long le condensateur est déchargé complètement il prend donc la valeur u_c=B''=0
- Au final A=E , remplaçons ces deux résultats dans l'équation ①
- On obtient : $\boxed{u_c = Ee^{-t/\tau}}$



❖ ***Si u(t) est une rampe : u(t)= P×t***

$$\tau \frac{du_c}{dt} + u_c = P \times t$$

- La SGESSM est toujours de la même forme : $u_{c1}(t) = Ae^{-t/\tau} + B$
- La SP est un polynôme de degré 1 : $u_{c2}(t) = K_1 t + K_2$

En remplaçant cette SP dans l'équation différentielle : on obtient $\tau K_1 + K_1 t + K_2 = Pt$ soit en identifiant : $\begin{cases} K_1 = P \\ K_2 = -\tau P \end{cases}$

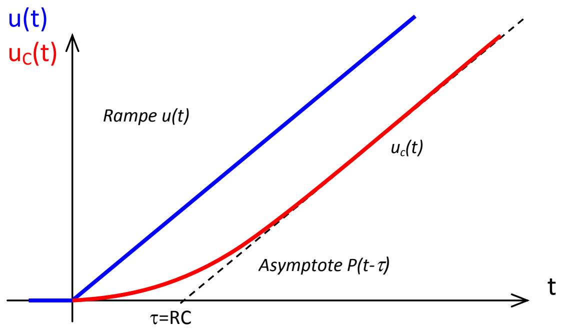
d'où $u_{c2}(t) = P(t-\tau)$.(le circuit RC agit comme un retard)

Donc la solution générale est $u_c(t) = u_{c1}(t) + u_{c2}(t) = Ae^{-t/\tau} + B + P(t-\tau)$.

- En réinjectant cette solution dans l'équation différentielle on obtient : $B = 0$
- La condition initiale donne $u_c(0) = 0$ donc $A = \tau P$

D'où l'expression finale $u_c(t) = \tau P\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right) + Pt$

Réponse à une rampe



II.4.3) Résolution de l'équation différentielle par les variables de Laplace :

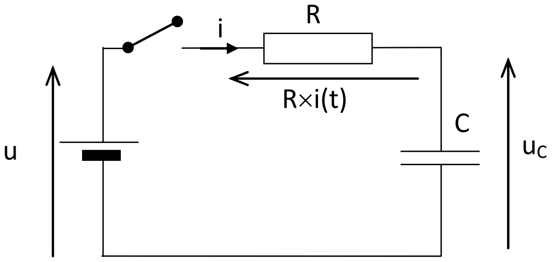
II.4.3.1) Fonction de transfert isomorphe:

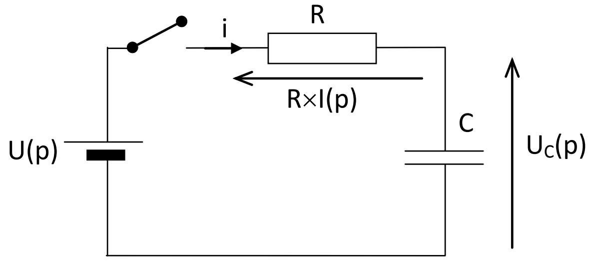
Dans le cas du circuit RC nous obtenions $\tau \frac{du_c}{dt} + u_c = u(t)$ ce que l'on notera d'une façon plus générale

$\boxed{\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)}$ avec τ la constante de temps du système et k le gain statique qui vaut 1 dans notre cas.

La transformation de Laplace donne $\tau pS(p) - s(0^+) + S(p) = E(p)$ avec $s(0^+)$ souvent nulle soit

$\boxed{\tau pS(p) + S(p) = E(p)}$





En écrivant le pont diviseur de tension on obtient directement : $U_C(p) = \frac{1/Cp}{R + 1/Cp} U(p)$ soit

$$H(p) = \frac{U_C(p)}{U(p)} = \frac{1}{RCp + 1}$$

En reprenant l'équation précédente on obtient la fonction de transfert $\boxed{H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}}$.

II.4.3.2) Résolution de la fonction de transfert isomorphe:

- *Résolution immédiate pour un cas simple:*

Si la fonction e(t) est un échelon $e(t) = \mathrm{U}(t)$ alors $E(p) = \frac{E}{p}$ donc $S(p) = \frac{1}{(1+\tau p)} \cdot \frac{1}{p}$ et les transformations usuelle de Laplace nous donnent $\left[\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \cdot \mathrm{U}(t)\right] = \frac{1}{p(1+\tau p)}$ donc $\boxed{s(t) = E \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \cdot \mathrm{U}(t)}$

- *Méthode générale de résolution:*

Après avoir effectué la transformée de Laplace de l'entrée, on détermine $S(p) = H(p) \cdot E(p)$

Si e(t) est un échelon unitaire $E(p) = \frac{1}{p}$

Une fois obtenue la solution en variables de Laplace $S(p) = \frac{1}{(1+\tau p)} \cdot \frac{1}{p}$

On cherche à exprimer la solution sous forme de somme : $S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{(1+\tau p)}$

Pour trouver les coefficients A et B on réduit au même dénominateur et on identifie les numérateurs :

$S(p) = \frac{A(1+\tau p) + Bp}{p(1+\tau p)} = \frac{1}{(1+\tau p)} \cdot \frac{1}{p}$ donc $A(1+\tau p) + Bp = 1$ donc $\boxed{A = 1}$ et $p(A\tau + B) = 0 \Rightarrow \boxed{B = -\tau}$

Donc $S(p)=\frac{1}{p}-\frac{\tau}{(1+\tau p)}$ soit $S(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}$ fonction de Laplace dont les transformées de Laplace inverse sont faciles à trouver : $L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]=1$ et $L^{-1}\left[-\frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}\right]=-e^{-\frac{t}{\tau}}$ donc $\boxed{s(t)=\left(1-e^{-t/\tau}\right)\cdot \mathrm{U}(t)}$

II.5) Exemple 2 : Etude théorique de l'établissement et de l'extinction du courant dans une bobine

L'exemple d'un circuit élémentaire constitué d'une résistance et d'une bobine L peut être représentatif de

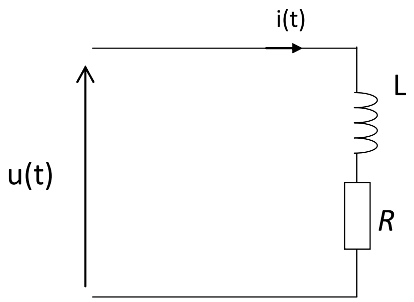
- la modélisation d'un circuit de chauffage électrique à résistance,
- d'un moteur électrique à courant continu,
- d'un filtre de télécommunication.

La grandeur de sortie est ici le courant que l'on souhaite connaître car il est

- la source des pertes joules donc de l'évolution de la température pour le four,
- l'image du couple pour le moteur à courant continu

La grandeur d'entrée est la tension

II.5.1) Etablissement de l'équation différentielle :



La tension aux bornes d'une bobine est donnée par la relation $u_L = L\dfrac{di}{dt}$

La loi des mailles donne $u(t) = Ri(t) + L\dfrac{di}{dt}$

On fait apparaître l'équation différentielle

$$i(t) + \underbrace{\frac{L}{R}}_{\tau} \cdot \frac{di}{dt} = \frac{u(t)}{R}$$

II.5.2) Résolution de l'équation différentielle :

II.5.2.1) Solution générale de l'équation sans second membre (SGESSM) :

La solution de l'équation sans second membre $i(t) + \tau \cdot \dfrac{di}{dt} = 0$ est $i(t) = Ae^{-t/\tau} + B$

II.5.2.2) Recherche d'une solution particulière (SP), détermination des constantes :

- ***Si u(t) est un signal en échelon : : le signal u(t) passe de 0 à E à t=0 puis de E à 0 à T/2***

La solution particulière est de la même forme que i(t) qui sera là encore une constante donc $\boxed{i(t) = Ae^{-t/\tau} + B}$.

Dans une bobine les discontinuités de courant n'existent pas donc

Etablissement	• à t=0 : i(0) = 0 donc $i(0) = A + B = 0$ • à t=∞ : i(∞) = E/R.donc $i(\infty) = B = \dfrac{E}{R}$ • En regroupant les résultats : $\boxed{i(t) = \dfrac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$: le courant croît jusqu'à atteindre la valeur finale E/R
Extinction	• à t=0 : i(0) = E/R donc $i(0) = A + B = \dfrac{E}{R}$ • à t=∞ : i(∞) = 0.donc $i(\infty) = B = 0$ • En regroupant les résultats : $\boxed{i(t) = \dfrac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}}$: le courant décroît de façon exponentielle et s'annule

- ***Si u(t) est un signal sinusoïdal :***

La solution particulière est de la même forme que i(t) qui sera là encore une constante donc $\boxed{i(t) = Ae^{-t/\tau} + B}$.

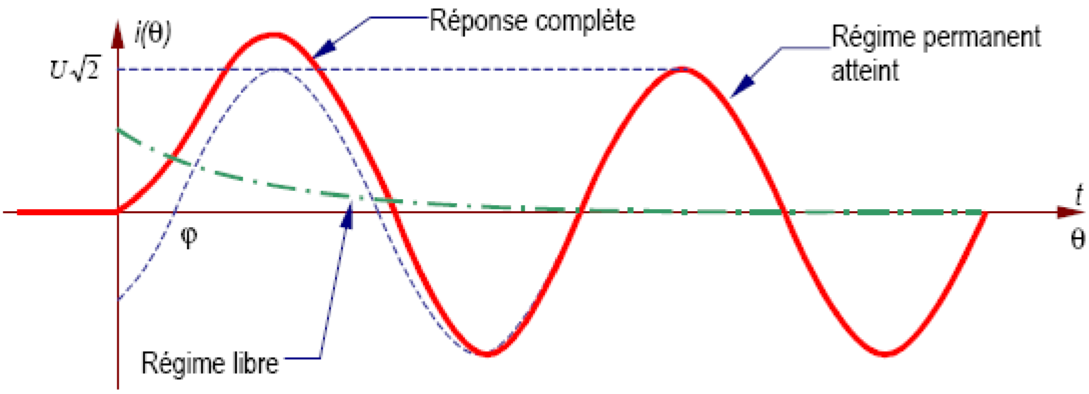
La solution particulière correspond ici au régime permanent

Soit $I_{RP} = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$ et $\varphi = -Arc\tan\left(\dfrac{L\omega}{R}\right)$ et donc $\boxed{i_{RP}(t) = I_{RP}\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)}$

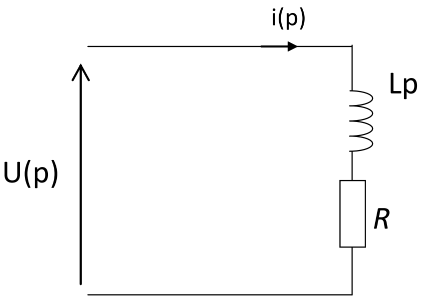
Donc la solution s'écrie :

$i(t) = Ae^{-t/\tau} + I_{RP}\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)$ et la condition initiale i(0)=0 permet de trouver les constantes.

$$\boxed{i(t) = I_{RP}\sqrt{2}\left(\sin\varphi e^{-t/\tau} + \sin(\omega t - \varphi)\right)}$$



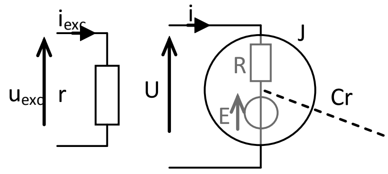
- ***Si u(t) est une rampe il est aisé de trouver l'expression de $u_L(t)$:***



$$V_L(p) = \frac{Lp}{R+Lp}U(p) = \frac{Lp}{R+Lp}\frac{E}{p^2} = E\frac{1}{p\left(p+\frac{1}{\tau}\right)} = E\left(\frac{\tau}{p} - \frac{\tau}{p+\frac{1}{\tau}}\right)$$

Donc $v_L(t) = E\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

II.6) Exemple 3 : MCC soumise à un échelon de tension:



II.6.1) Etablissement de l'équation différentielle :

Sur un solide en rotation on applique le théorème du moment cinétique :

$$\boxed{J\frac{d\Omega}{dt}=T_{moteur}-T_{résist}} \quad ①$$

avec

- J le moment d'inertie de toute la partie tournante
- f : un coefficient de frottement visqueux
- T_{moteur} : le couple électromagnétique $T_{moteur}=Ki$
- $T_{résis}$: le couple résistant ($=T_C$ ou = $f\Omega+T_C$ dans le cas d'un frottement visqueux)

Dans le cas où l'inductance propre du rotor est négligeable.
On a alors

$i=\dfrac{U-E'}{r}$ et E'=K Ω et $T_{moteur}=Ki$ alors $T_{moteur}=K\dfrac{U-K\Omega}{r}$

si le moteur est à flux constant. La relation ① devient dans le cas d'un couple constant + visqueux

$$J\frac{d\Omega}{dt}+f\Omega=K\frac{U-K\Omega}{r}-T_{résist}$$

$$J\frac{d\Omega}{dt}+\left(f+\frac{K^2}{r}\right)\Omega=K\frac{U}{r}-T_{résist}$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{J}{\left(f+\dfrac{K^2}{r}\right)}}_{\tau}\frac{d\Omega}{dt}+\Omega=\underbrace{\frac{K\dfrac{U}{r}-T_{résist}}{\left(f+\dfrac{K^2}{r}\right)}}_{\Omega_{final}}}$$

Le second membre est entièrement connu . C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants dont la solution est bien connue.

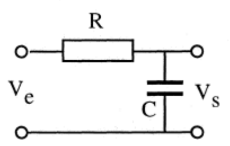
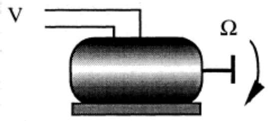
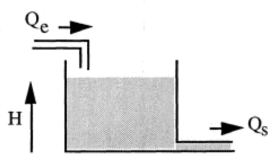
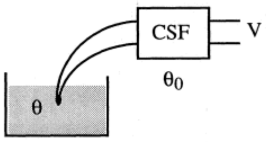
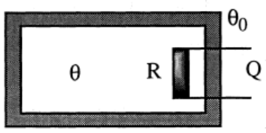
II.6.2) Résolution de l'équation différentielle :

Le terme f (frottement mécanique) est généralement négligeable devant le terme $\dfrac{K^2}{r}$ qu'on peut appeler un terme de « frottement électrique » et très souvent $f \ll \dfrac{K^2}{r}$ donc la constante de temps est

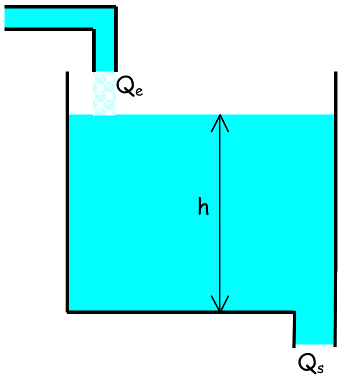
$$\tau=\frac{J}{f+\dfrac{K^2}{r}}\approx\frac{Jr}{K^2}$$

La solution générale est $\Omega=Ce^{-\frac{t}{\tau}}$ +solution particulière, La solution particulière est $\Omega = \dfrac{K\dfrac{U}{r} - T_{résist}}{\left(f + \dfrac{K^2}{r}\right)}$ si U est constant et en simplifiant (f=0 , $T_{résist}$=0), $\Omega = \dfrac{U}{K}$

II.7) Autres exemples:

Type	Schéma	F.T.	Application Numérique (exemples)	Observations
Circuit RC		$\frac{V_s}{V_e}=\frac{1}{1+Tp}$	$T = RC = 1ms$ $\frac{1}{1+10^{-3}\ p}$	
Moteur à courant continu		$\frac{\Omega}{V}=\frac{k}{1+Tp}$	k : 300 t/mn/V $T = 50\ 10^{-3}$ $\frac{10\pi}{1+50.10^{-3}\ p}$	k est exprimé en rad/s/V 300 t/mn/V ≈ 30 rad/s/V T : constante du temps électromécanique
Réservoir		$\frac{\Delta H}{\Delta Q_e}=\frac{k}{1+Tp}$	$k = 200\ m/m^3/s$ $\frac{200}{1+500p}$	process régi par une équation non-linéaire → la F.T. ne peut se définir qu'en variations ΔH et ΔQ_e
Thermocouple		$\Delta\theta=\theta-\theta_o$ $\frac{V}{\Delta\theta}=\frac{k}{1+Tp}$	thermocouple Chromel-Alumel $k\approx 40\mu V/°$ $T = 5s$ $\frac{40 10^{-6}}{1+5p}$	CSF compensation de soudure froide. Modèle de représentation
Enceinte thermique		$\Delta\theta=\theta-\theta_o$ $\frac{\Delta\theta}{Q}=\frac{k}{1+Tp}$ $k=1/K$ $T=mC_p/K$	$k = 2\ 10^{-4}\ °/W$ $T = 2000\ s$ $\frac{2 10^{-4}}{1+2000p}$	$mC_p\frac{dq}{dt}+K(q-q_0)=Q$

Un réservoir est alimenté par une conduite d'arrivée d'eau et délivre un certain débit. Le réservoir a une surface S et le niveau du liquide est repéré par la hauteur h. Le débit de la conduite qui amène le liquide est notée Q_e et le débit sortant est noté Q_S.
La grandeur de sortie est le niveau de liquide, la grandeur d'entrée est le débit Q_e.
Donc $Sdh/dt = Q_e - Q_S$



III) Régimes transitoires du second ordre

III.1) Résolution d'équation différentielles du second ordre à coefficients constants :

III.1.1) Définition

C'est une relation qui peut s'écrire :

$$\boxed{a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t)}$$ ① (ou a y' + b y = f(t))

dans laquelle a est une constante réelle non nulle, b et c sont deux constantes réelles et y une fonction inconnue (que l'on cherche à déterminer) et f une fonction continue.

$j^2=-1$

$r_1=\frac{-b+j\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$r_2=\frac{-b-j\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$\alpha=-\frac{b}{2a};\beta=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

NB : une formulation classique de cette même équation est la suivante
Cette formulation fait apparaître

- le coefficient d'amortissement m
- et la pseudo pulsation ω_0

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+2m\omega_0\frac{dy}{dt}+\omega_0^2y=g(t)}\\ \text{ou }\ \frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2m}{\omega_0}\frac{dy}{dt}+y=\frac{g(t)}{\omega_0^2}\end{array}\right\}où\ \begin{cases}\frac{b}{a}=2m\omega_0\\ \frac{c}{a}=\omega_0^2\\ g(t)=\frac{f(t)}{a}\end{cases}\quad donc\ \begin{cases}m=\frac{b}{2\sqrt{ca}}\\ \omega_0=\sqrt{\frac{c}{a}}\\ g(t)=\frac{f(t)}{a}\end{cases}$$

L'équation :

$$\boxed{a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=0}$$ ② est appelée équation sans second membre associée à ①

III.1.2) Résolution

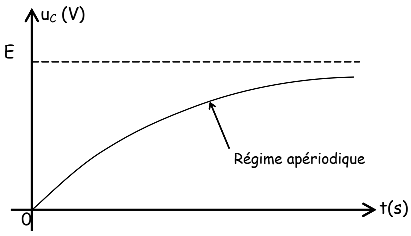
a- Résolution de l'équation sans second membre ② :

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=0$$

Soit r un nombre réel . L'équation : $ar^2+br+c=0$ (ou $r^2+2m\omega_0r+\omega_0^2=0$) est appelée équation caractéristique associée à ②. On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac>0$ ou $\Delta=4\omega_0^2\left(m^2-1\right)$

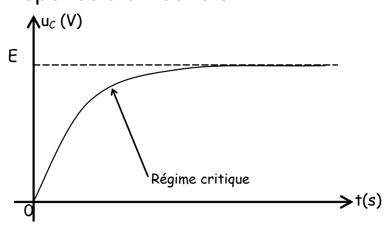
- ***1^er^ cas*** : $\boxed{\Delta>0}$ soit $\boxed{m>1}$
  L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 :
  $r_1=-m\omega_0+\omega_0\sqrt{1-m^2}$ et $r_2=-m\omega_0-\omega_0\sqrt{1-m^2}$.
  La solution générale de l'équation sans second membre ② est :
  $\boxed{y(t)=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}}$ où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles arbitraires.

Réponse à un échelon¨



- ***2^ème^ cas*** : $\boxed{\Delta=0}$ soit $\boxed{m=1}$
  L'équation caractéristique admet une racine double : $r=-\frac{b}{2a}$.
  La solution générale de l'équation sans second membre ② est :
  $\boxed{y(t)=(C_1+C_2t)e^{-rt}}$ où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles arbitraires.

Réponse à un échelon



- ***3ème cas :*** $\boxed{\Delta < 0}$ soit $\boxed{m < 1}$

  L'équation caractéristique admet deux racines distinctes, complexes,

  conjuguées : $r_1 = \alpha + j\beta$ et $r_2 = \alpha - j\beta$ ou

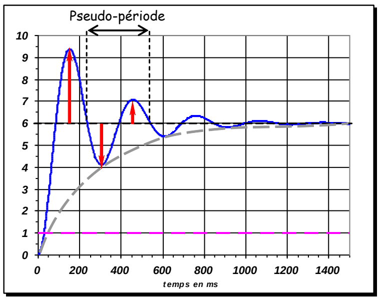
  $$r_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2}.$$

  La solution générale de l'équation sans second membre ② est :

  $\boxed{y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)}$ ou

  $\boxed{y(t) = e^{-m\omega_0 t}(C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t})}$ ou $\boxed{y(t) = Ce^{-m\omega_0 t} \cos\left(\omega t + \varphi\right)}$

Réponse à un échelon



  où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles arbitraires et $\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$

b- Résolution de l'équation avec second membre ① : Si l'on connaît une solution particulière $y_0(t)$ de l'équation ① alors la solution générale de ① est : $\boxed{y(t) = Y(t) + y_0(t)}$

Les constantes sont déterminées à l'aide de 2 conditions initiales. Dans de nombreux cas ces conditions sont données à t=0 .

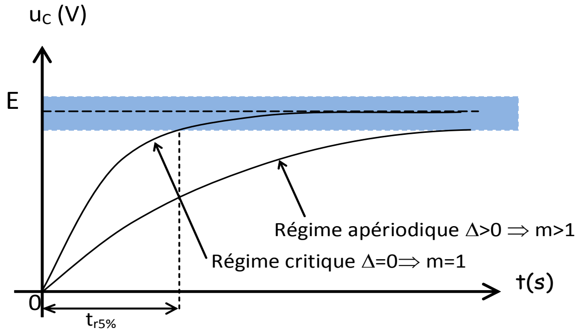
c- Détermination des constantes : à l'aide des condition initiales sur

III.1.3) Recherche d'une solution particulière de ①

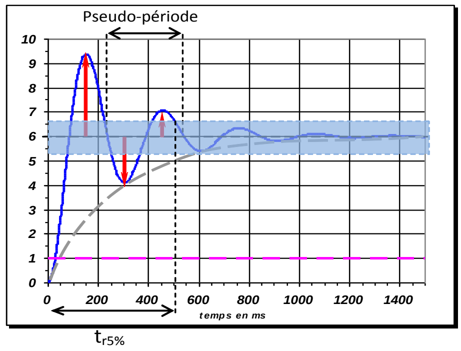
Dans les cas les plus courants on recherchera une solution particulière de ① du même type que la fonction f(t) apparaissant au second membre de ①

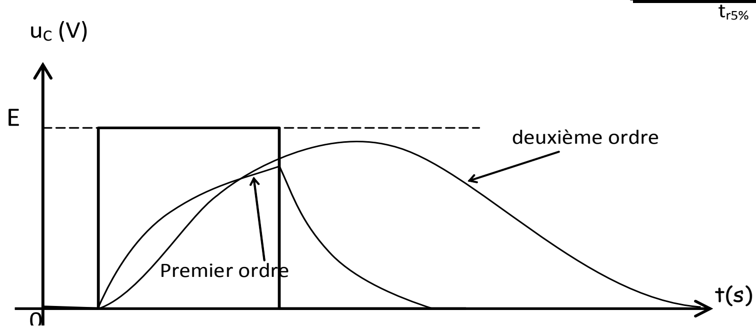
	Forme du second membre $t \to f(t)$	Forme de la solution particulière recherchée $t \to y_0(t)$
I	constante	constante
II	Polynôme de degré n	• Polynôme de degré n si $c \neq 0$ • Polynôme de degré n+1 si c=0 et $b \neq 0$ • Polynôme de degré n+2 si c=0 et b=0
III	A $\cos\omega t$ +B $\sin\omega t$	• $\lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t$ si $j\omega$ non solution de l'équation caractéristique • $t(\lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t)$ si $j\omega$ solution de l'équation caractéristique sans être solution double • $t^2(\lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t)$ si $j\omega$ solution double de l'équation caractéristique
IV	$Ae^{\alpha t}$	• $\lambda e^{\alpha t}$ si α non solution de l'équation caractéristique • $t\lambda e^{\alpha t}$ si λ solution de l'équation caractéristique sans être solution double $t^2\lambda e^{\alpha t}$ si λ solution double de l'équation caractéristique

III.1.4) Courbes et observations caractéristiques



Régime pseudo périodique Δ<0 ⇒ m<1



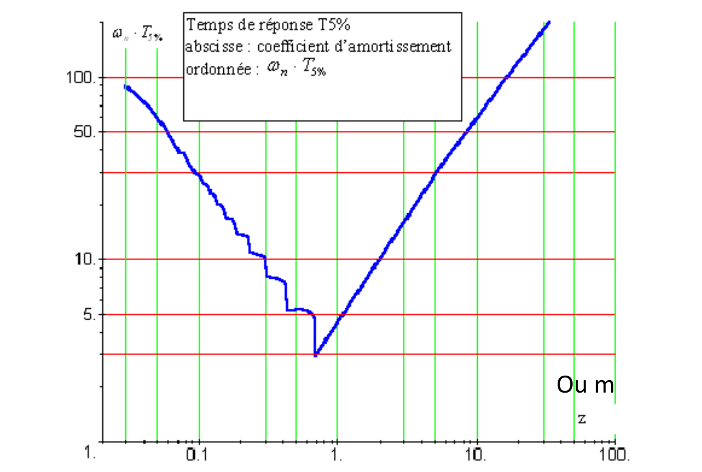
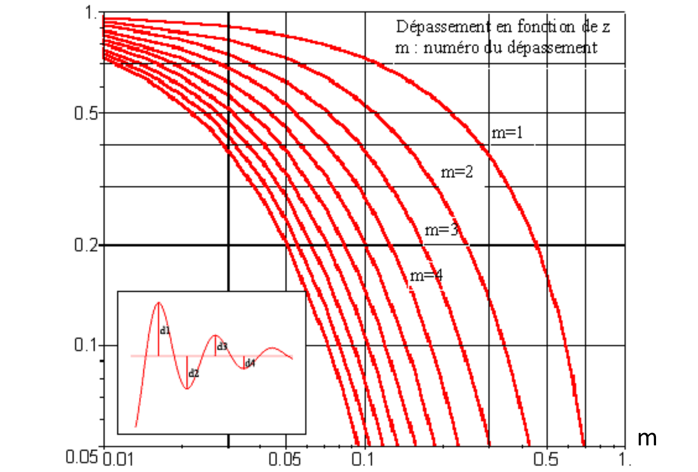


- **Temps de réponse à 5% : $t_{r5\%min}$**
  - Le temps de réponse à 5% est le temps au bout duquel la tension $u_C(t)$ est comprise entre les deux horizontales d'ordonnées 1,05 E et 0,95 E.
  - On peut noter que $t_{r5\%min}$ est minimale si le coefficient d'amortissement m=0.7. Sa valeur est alors $t_{r5\%min} = 0.44\dfrac{2\pi}{\omega_0}$. Ce que l'on retrouve sur les abaques ci-dessous.
  - Si m << 1 alors $\dfrac{t_{r5\%\min}}{\dfrac{2\pi}{\omega_0}} = \dfrac{3}{2\pi m} \Longrightarrow \boxed{t_{r5\%\min} = \dfrac{3}{m\omega_0}}$
- **Dépassement :**
  - $d = \dfrac{u_{\max} - E}{E} = e^{-\pi\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}}$

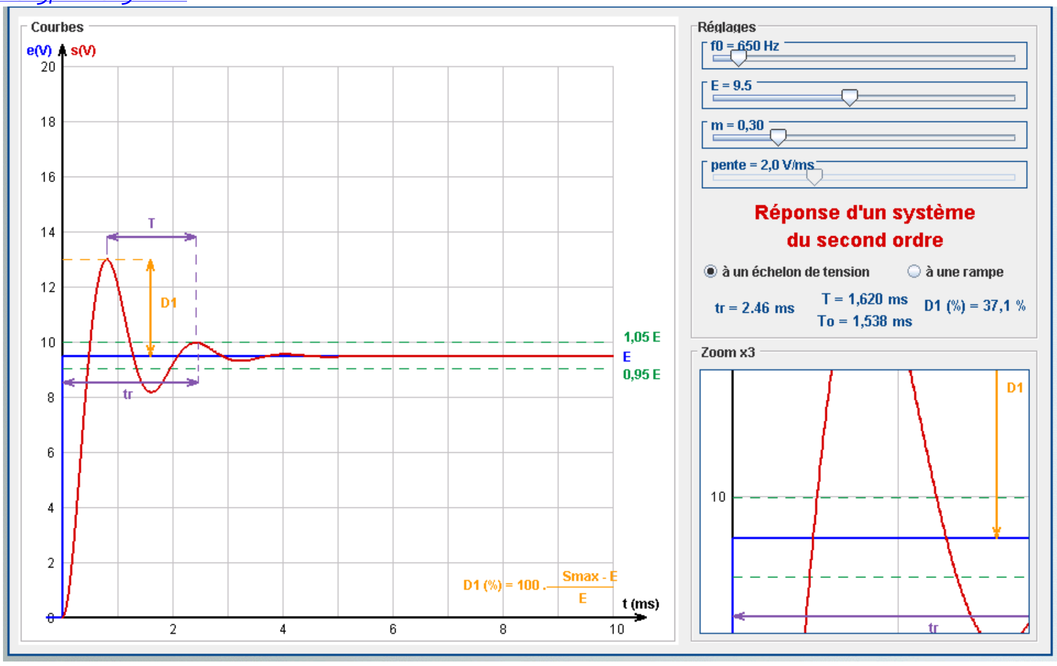
III.1.5) Abaques:

Ces abaques permettent de trouver les réponses d'un système du 2ème ordre à un échelon.

L'abaque des temps de réponses : permet de trouver le temps de réponse si l'on connaît m et ω_0 ou sur une courbe après avoir mesuré ω_0 et $t_{r5\%}$ on peut en déduire m	***L'abaque des dépassements*** (en pourcentage de la valeur finale) permet de déterminer le nombre et la valeur des dépassements (en ordonnées : le pourcentage du dépassement En abscisses : le coefficient d'amortissement)

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>La partie gauche correspond à des régimes pseudo périodiques
La partie droite correspond à des régimes apériodiques</td>
<td>La verticale passsant par le m considéré croise les diverses courbes et donne ainsi le nombre et la valeur du dépassement en %</td>
</tr>
</table>

http://www.lyc-charlescoulomb.ac-poitiers.fr/site/contenu/ressources/formations/Intranet/coulomb-exos-phy/applets/filtres3/filtres3.htm



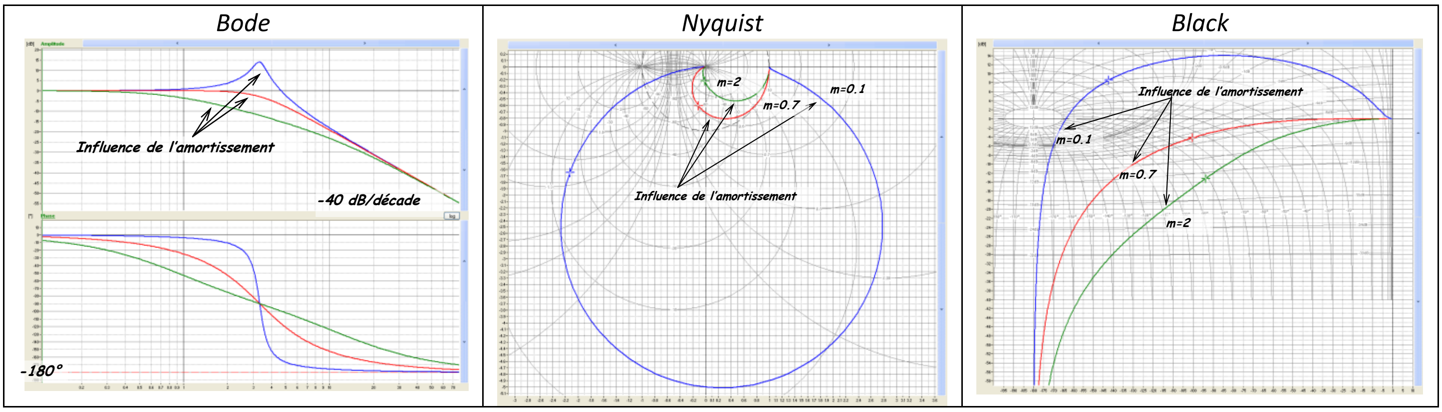
III.2) Réponse d'un système du deuxième ordre en régime harmonique:

$$T(j\omega)=k\frac{1}{1+2jm\frac{\omega}{\omega_0}+\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \qquad T(p)=k\frac{1}{1+\frac{2mp}{\omega_0}+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$$f_r=f_0\sqrt{1-2m^2}$$

$$T_{max}=\frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

$$Q=\frac{1}{2m}=\frac{f_r}{f_2-f_1}$$



III.3) Notation en variables de Laplace:

Dans le cas du circuit RLC nous obtenions une équation différentielle du type

$\frac{d^2s(t)}{dt^2}+2m\omega_0\frac{ds(t)}{dt}+\omega_0^{\,2}s(t)=e(t)$ que l'on préférera écrire sous la forme

$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2m}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=\frac{1}{\omega_0^2}e(t)$ que l'on peut transformer en variables de Laplace :

En effet $\begin{cases} s(t)\rightarrow S(p) \\ \frac{ds(t)}{dt}\rightarrow pS(p) \\ \frac{d^2s(t)}{dt^2}\rightarrow p^2S(p) \end{cases}$

$\frac{p^2}{\omega_0^2}S(p)+\frac{2mp}{\omega_0}S(p)+S(p)=\frac{1}{\omega_0^2}E(p)$ et l'on fait apparaître la fonction de transfert

$\boxed{H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=k\frac{1}{1+\frac{2mp}{\omega_0}+\frac{p^2}{\omega_0^2}}}$ donc pour une entrée en échelon $e(t)=\mathrm{U}(t)$ alors $E(p)=\frac{1}{p}$ donc

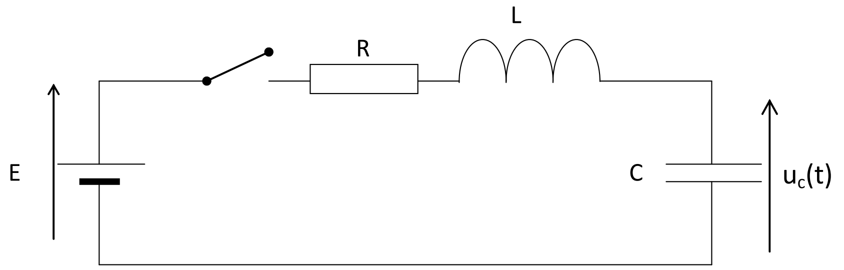
$S(p)=k\frac{1}{1+\frac{2mp}{\omega_0}+\frac{p^2}{\omega_0^2}}\cdot\frac{1}{p}$ et les transformations usuelle de Laplace nous donnent

$\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}e^{-m\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}\,t+\varphi\right)\right]$ = $\frac{1}{p\left(1+\frac{2mp}{\omega_0}+\frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$ donc

$$\boxed{s(t)=k\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}e^{-m\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}\,t+\varphi\right)\right]}$$ avec $\varphi=Arc\tan\left(\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}\right)$

III.4) Exemple 1 :Etude théorique de la réponse indicielle d'un circuit RLC série

III.4.1) Schéma du montage :



NB : on peut établir de la même manière l'équation différentielle liée au courant

Comme $i(t) = C\dfrac{du_C}{dt}$ on a aussi

$u_C(t) = \dfrac{1}{C}\int i(t)dt$, l'équation (1) devient

$Ri(t) + L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}\int i(t)dt = E$

que l'on peut dériver de façon à faire disparaître l'intégrale

$\dfrac{d^2i}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{LC}i(t) = 0$

III.4.2) Etablissement de l'équation différentielle du 2nd ordre :

On cherche à obtenir une équation relative à une des grandeurs du circuit que l'on pourra écrire sous cette forme $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2m\omega_0\dfrac{dy}{dt} + \omega_0{}^2 y = f(t)}$ (avec m coef d'amortissement, et ω_0 : pulsation propre)

On considère le circuit RLC soumis à l'instant t=0 à un échelon de tension E, le condensateur étant initialement déchargé. A la fermeture de l'interrupteur K , un courant apparaît dans le circuit . L'équation de la maille s'écrit :

$$E - Ri(t) - L\frac{di}{dt} - u_C(t) = 0 \qquad (1)$$

Pour le condensateur on peut écrire : $i(t) = C\dfrac{du_C}{dt}$ (2)

En reportant (2) dans (1), on obtient :

$$\boxed{LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C(t) = E}$$

(3) Equation différentielle du second degré

On fait apparaitre la forme classique :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{du_C}{dt} + \omega_0{}^2 u_C = \omega_0{}^2 E$$

Pour cela il faut tout diviser par LC

L'équation (3) devient

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C(t) = \frac{E}{LC}$$

On identifie à la forme classique et l'on trouve $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ (**pulsation propre** du circuit)

Et $2m\omega_0 = \dfrac{R}{L}$

$$\Rightarrow m = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{R}{2L\dfrac{1}{\sqrt{LC}}} = \frac{R}{2L}\sqrt{LC} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Donc $\boxed{m = \dfrac{R}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$ (**coef d'amortissement**)

III.4.3) Résolution de l'équation différentielle:

On résout *l'équation caractéristique* : $r^2 + 2m\omega_0 r + \omega_0{}^2 = 0$

Le discriminant réduit est : $\Delta' = m^2\omega_0{}^2 - \omega_0{}^2 = \omega_0{}^2(m^2 - 1)$

L'étude du signe de Δ' amène à distinguer trois cas : $\Delta' = 0$, $\Delta' > 0$, $\Delta' < 0$

Les **conditions initiales** permettant de déterminer les constantes sont :

$u_C(0)=0$ et $i_C(0)=0 \Rightarrow C\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0}=0$

- $\Delta'>0 \Rightarrow m>1 \Rightarrow R>R_C$

L'équation caractéristique compte deux racines réelles : $r_1=-m\omega_0+\omega_0\sqrt{1-m^2}$ et $r_2=-m\omega_0-\omega_0\sqrt{1-m^2}$. On peut considérer ce système comme l'association de deux circuits du premier ordre. Le régime est fortement amorti. La réponse est dite apériodique (voir figure ci-après). La réponse est exponentielle et le dépassement est nul

$$\boxed{u(t)=E+A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}}$$

avec $r_1=-m\omega_0+\omega_0\sqrt{m^2-1}$ $\quad$ $r_2=-m\omega_0-\omega_0\sqrt{m^2-1}$

$$A_1=-E\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{2\sqrt{m^2-1}} \qquad A_2=+E\frac{m-\sqrt{m^2-1}}{2\sqrt{m^2-1}}$$

- $\Delta'=0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow R_C=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ Pour cette valeur particulière de R, appelée « résistance critique » et notée R_C ,

l'équation caractéristique compte deux racines doubles .

La solution de l'équation est : $r=-m\omega_0=-\omega_0$

$$\boxed{u_C(t)=E\left[1-(1+\omega_0t)e^{-\omega_0t}\right]}$$

- $\Delta'<0 \Rightarrow m<1 \Rightarrow R<R_C$ L'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées :

$r_1=-m\omega_0+j\omega_0\sqrt{1-m^2}$ et $r_2=-m\omega_0-j\omega_0\sqrt{1-m^2}$

On a affaire cette fois à un régime oscillatoire (ou sinusoïdal) amorti, la réponse est dite « pseudo-périodique » ; on note ω_p la pulsation des oscillations. L'allure de la réponse indicielle est donnée ci-dessous.

L'expression de la SGESSM est du type $\boxed{u_C(t)=Ce^{-m\omega_0t}\cos\left(\omega_pt+\varphi\right)}$

Son expression générale est la suivante : $\boxed{u_C(t)=E\left[1-\frac{1}{\cos\varphi}\cos\left(\omega_pt+\varphi\right)e^{-m\omega_0t}\right]}$ ou

Ou $\boxed{u_C(t)=E\left[1-(\cos\omega_pt+\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\sin\omega_pt)e^{-m\omega_0t}\right]}$

Avec $\omega_p=\omega_0\sqrt{1-m^2}$

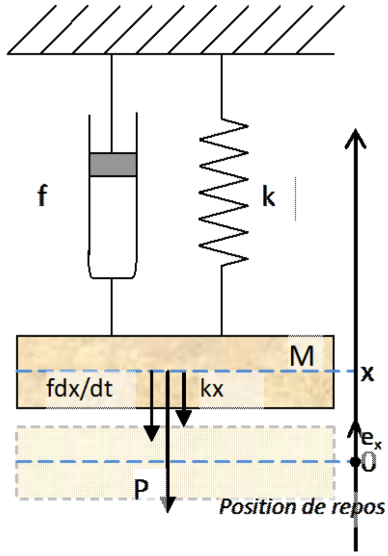
III.5) Exemple 2 : Mécanique:

Un système mécanique en translation constitué d'une masse M mise en mouvement par l'action d'une force extérieure e(t). Cette masse est reliée à un ressort de raideur k et à un amortisseur de force de frottement f qui s'oppose au mouvement.

Bilan des forces :

$$\sum \vec{F} = M\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x$$



Les forces en présences sont :

- Le poids : $\vec{P} = M\vec{g} = -Mg\vec{e}_x$
- La force du ressort $\vec{F}_r = -kx\vec{e}_x$ (S'il est comprimé : x>0, la force est opposée à e_x)
- La force de l'amortisseur : qui s'oppose au mouvement : $\vec{F}_f = -f\dfrac{dx}{dt}\vec{e}_x$

Donc $\sum \vec{F} = M\vec{a}$ donne

$$-Mg\vec{e}_x - kx\vec{e}_x - f\frac{dx}{dt}\vec{e}_x = M\frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x$$

$$\Rightarrow M\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + kx = -Mg$$

L'équation différentielle du 2$^{\text{ème}}$ ordre mise sous une forme classique est donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{f}{M}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{M}x = -g \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}} \\ m = \dfrac{f}{2\sqrt{kM}} \end{cases}$$

III.5.1) Liens :

Réponse à un échelon ou rampe d'un ordre 2

http://hebergement.ac-poitiers.fr/l-cc-angouleme/coulomb-exos-phy/applets/filtres3/filtres3.htm

IV) Rappels sur le Formalisme de Laplace

La transformation de Laplace s'applique aux fonctions causales (nulles si t<0)

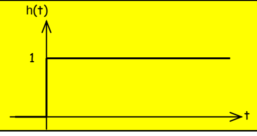
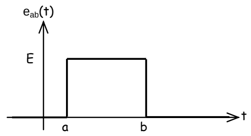
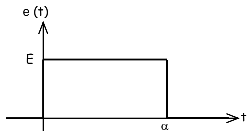
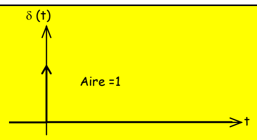
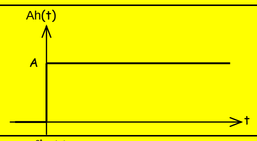
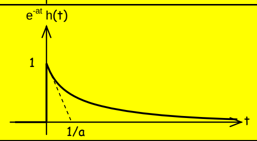
Définition : On considère la transformée de Laplace comme $\Lambda\left[f(t)\cdot \mathrm{h}(t)\right]=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=F(p)$.

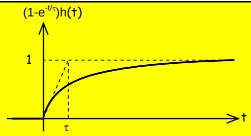
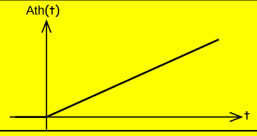
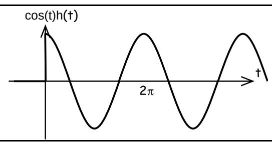
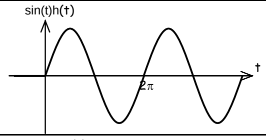
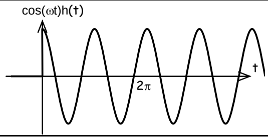
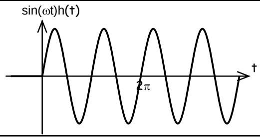
La réciproque est $f(t)=\Lambda\left[F(p)\cdot \mathrm{h}(p)\right]=\int_0^\infty e^{pt}F(p)dt$

- La transformation de Laplace est une opération linéaire : $\left[\left(a\cdot f(t)+b\cdot g(t)\right)\cdot \mathrm{h}(t)\right]=a\cdot F(p)+b\cdot G(p)$
- Fonction dérivable et continue sur]0 ;+∞[: $\Lambda\left[f'(t)\cdot \mathrm{h}(t)\right]=pF(p)-f(0^+)$
- Fonction dérivable et continue sur]0 ;+∞[: $\Lambda\left[f''(t)\cdot \mathrm{h}(t)\right]=p^2F(p)-pf(0^+)-f'(0^+)$
- Transformée de l'intégrale d'une fonction : $\Lambda\left[\left(\int_0^t f(t)\,dt\right)\cdot \mathrm{h}(t)\right]=\dfrac{F(p)}{p}-\dfrac{f(0^-)}{p}$

- Théorème valeur initiale : $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p)=f(0^+)=\lim\limits_{t\to 0} f(t)$
- Théorème valeur finale : $\lim\limits_{p\to 0} pF(p)=\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$

- Théorème du retard : un retard de τ sur f(t) se traduit par une multiplication par $e^{-p\tau}$ de $F(p)$
  $\left[f(t-\tau)\cdot \mathrm{h}(t-\tau)\right]=e^{-p\tau}F(p)$
- Translation dans le plan complexe $\left[e^{-at}\cdot f(t)\cdot \mathrm{h}(t)\right]=F(p+a)$

$f(t)$	Représentation temporelle	$F(p)=\int_{0-}^\infty f(t)e^{-pt}dt$
Echelon de Heaviside $\begin{cases}\mathrm{h}(t)=1 & \text{si } t\geq 0\\ \mathrm{h}(t)=0 & \text{si } t<0\end{cases}$		$\dfrac{1}{p}$
$\begin{cases}\mathrm{e}_{ab}(t)=0 & \text{si } t<a\\ \mathrm{e}_{ab}(t)=E & \text{si } a\leq t<b\\ \mathrm{e}_{ab}(t)=0 & \text{si } t>b\end{cases}$ $\Rightarrow \mathrm{e}(t)=E\mathrm{h}(t-a)-E\mathrm{h}(t-b)$		$\dfrac{E}{p}(e^{-ap}-e^{-bp})$
$\begin{cases}\mathrm{e}(t)=0 & \text{si } t<0\\ \mathrm{e}(t)=E & \text{si } 0\leq t<\alpha\\ \mathrm{e}(t)=0 & \text{si } t>\alpha\end{cases}$ $\Rightarrow \mathrm{e}(t)=E\mathrm{h}(t)-E\mathrm{h}(t-\alpha)$		$\dfrac{E}{p}(1-e^{-p\alpha})$
$\delta(t)$		1
$A\cdot \mathrm{h}(t)$		$\dfrac{A}{p}$
$e^{-at}\cdot \mathrm{h}(t)$		$\dfrac{1}{p+a}$

$\left(1-e^{-t/\tau}\right)\cdot \mathrm{h}(t)$		$\dfrac{1}{p(1+\tau p)}$
$A\cdot t\cdot \mathrm{h}(t)$		$\dfrac{A}{p^2}$
$t\cdot e^{-at}\cdot \mathrm{h}(t)$		$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
Echantillonneur bloqueur		$\dfrac{1-e^{-pT_e}}{p}$
$t^n\cdot \mathrm{h}(t)$		$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$f(at)\cdot \mathrm{h}(t)$		$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{p}{a}\right)$
$(-t)^n\cdot f(t)\cdot \mathrm{h}(t)$		$\dfrac{d^nF(p)}{dp^n}$
$\cos(t)\cdot \mathrm{h}(t)$		$\dfrac{p}{p^2+1}$
$\sin(t)\cdot \mathrm{h}(t)$		$\dfrac{1}{p^2+1}$
$\cos(\omega t)\cdot \mathrm{h}(t)$		$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\cdot \mathrm{h}(t)$		$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$t^n\cdot e^{at}\cdot \mathrm{h}(t)$		$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\dfrac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})\cdot \mathrm{h}(t)$		$\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$
$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\cdot \mathrm{h}(t)$		$\dfrac{1}{p^n}$ avec n ∈ naturels
$\sqrt{t}\cdot \mathrm{h}(t)$		$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}p^{-3/2}$
$\left[\dfrac{\omega}{\sqrt{1-m^2}}e^{-m\omega t}\sin(\omega\sqrt{1-m^2}t)\right]\mathrm{h}(t)$		$\dfrac{1}{1+\dfrac{2mp}{\omega}+\dfrac{p^2}{\omega^2}}$
$\left[1-\dfrac{1}{\sqrt{1-m^2}}e^{-m\omega t}\sin(\omega\sqrt{1-m^2}t+\varphi)\right]\mathrm{h}(t)$		$\dfrac{1}{p\left(1+\dfrac{2mp}{\omega}+\dfrac{p^2}{\omega^2}\right)}$ avec sinφ = √(1-m²) et cos φ = m

$\text{ch}(\omega t)\cdot \text{h}(t)$		$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
$\text{sh}(\omega t)\cdot \text{h}(t)$		$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\tau\left(e^{-t/\tau}+\dfrac{t}{\tau}-1\right)$		$\dfrac{1}{p^2(1+\tau p)}$

Exemple de résolution :

$F(p)=\dfrac{4}{p(1+2p)(1+3p)}$ donne $F(p)=\dfrac{4}{p}+\dfrac{16}{(1+2p)}-\dfrac{36}{(1+3p)}$ donc $f(t)=4+8e^{-t/2}-12e^{-t/3}$

$F(p)=\dfrac{kE}{(1+\tau p)\,p^2}$ donne $F(p)=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p^2}+\dfrac{C}{(1+\tau p)}$ donc $\begin{cases} A=-kE\tau \\ B=kE \\ C=kE\tau^2 \end{cases}$ donc

$f(t)=-kE\tau+kE\times t+kE\tau^2 e^{-t/\tau}=kE\left(t-\tau+\tau e^{-t/\tau}\right)$

V) Résolution numérique d'une équation différentielle

Méthode d'Euler :

$$\tau \times \frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) = k \times v_e(t)$$

$$\tau \times \frac{v_s(t_{n+1}) - v_s(t_n)}{\Delta t} + v_s(t_n) = k \times v_e(t_n)$$

$$v_s(t_{n+1}) = \left(k \times v_e(t_n) - v_s(t_n)\right) \times \frac{\Delta t}{\tau} + v_s(t_n)$$