الفصل 2 :

القيم الذاتية و الأشعة الذاتية (Valeurs et Vecteurs Propres)

تعريف : ليكن V فضاءً شعاعيًا على حقل K . وليكن $f: V \longrightarrow V$ تطبيقًا خطيًا. نقول عن شعاع غير معدوم $x \in V$ أنه شعاع ذاتي لـ f إذا وجد مقدار سلمي $\lambda \in K$ بحيث

$$f(x) = \lambda x$$

نقول عن $\lambda \in K$ أنه قيمة ذاتية لـ f إذا وجد $x \neq 0_V \in V$ بحيث $f(x) = \lambda x$.

نقول في هذه الحالة عن x أنه الشعاع الذاتي المرفق للقيمة الذاتية λ .

ملاحظة : إذا كان x شعاع ذاتي لـ f ، فإنه توجد قيمة ذاتية واحدة مرافقة لـ x .

نفرض أن λ_1, λ_2 قيمتين ذاتيتين مرافقتين x. إذًا

$$f(x) = \lambda_1 x = \lambda_2 x \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)x = 0_V$$

بما أن $x \neq 0_V$ فإن $\lambda_1 - \lambda_2 = 0_K \iff \lambda_1 = \lambda_2$.

نظرية :

ليكن V ف.ش على K و $f: V \longrightarrow V$ تطبيق خطي و لتكن λ قيمة ذاتية لـ f . فإن مجموعة الأشعة الذاتية المرافقة لـ λ تشكل فضاء شعاعي جزئي من V و نرمز له بـ V_λ .

Scanné avec CamScanner

البرهان :

$$V_\lambda = \{ x \in V : f(x) = \lambda x \}$$

λ قيمة ذاتية لـ f $\Leftarrow$ $\exists x_0 \neq 0 : f(x_0) = \lambda x_0$

$\Rightarrow x_0 \in V_\lambda \Rightarrow V_\lambda \neq \phi$.

ليكن $x, y \in V_\lambda$ و $\alpha, \beta \in K$. لدينا

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha \cdot \lambda x + \beta \cdot \lambda y$$
$$= \lambda (\alpha x + \beta y) \Rightarrow \alpha x + \beta y \in V_\lambda$$

تعريف : يسمى V_λ بالفضاء الذاتي المرفق للقيمة الذاتية λ.

نظرية : ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K و $\lambda \in K$.
فإن λ قيمة ذاتية لتطبيق خطي $f : V \to V$ إذا وفقط إذا كان التطبيق $f - \lambda Id$ غير تقابلي

حيث

$$f - \lambda Id : V \longrightarrow V$$
$$x \longmapsto (f - \lambda I)(x) = f(x) - \lambda x$$

البرهان : نفرض أن $\lambda \in K$ قيمة ذاتية لـ f

$\Rightarrow \exists 0 \neq x \in V : f(x) = \lambda x = \lambda Id(x)$

$\Rightarrow f(x) - \lambda Id(x) = (f - \lambda Id)(x) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker(f - \lambda Id) \wedge x \neq 0_V$

$\Rightarrow f - \lambda Id$ غير متباين

Scanné avec CamScanner

نفرض أن $f-\lambda Id$ غير تقابلي فهو ليس متباين

(في الفضاء ذو البعد المنتهي $f: V \longrightarrow V$

f تقابلي $\Leftrightarrow$ f متباين $\Leftrightarrow$ f غامر)

$\Rightarrow \ker(f-\lambda Id) \neq \{0_V\}$.

$\Rightarrow \exists 0 \neq x \in V : x \in \ker(f-\lambda Id)$

$\Rightarrow (f-\lambda Id)(x) = 0 \iff f(x) = \lambda x$

ومنه λ قيمة ذاتية لـ f.

نتيجة: $\lambda \in K$ قيمة ذاتية لـ f $\Leftrightarrow \det(A-\lambda I_n) = 0$

حيث A المصفوفة المرافقة لـ f بالنسبة لأساس معين للفضاء V حيث $\dim_K V = n$.

مثال: ليكن التطبيق الخطي $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (x+4y, 2x+3y)$

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية والفضاءات الذاتية لـ f.

ملاحظة: إذا كان V فضاء شعاعي ذو بعد منته n على الحقل K و $f: V \longrightarrow V$ تطبيق خطي.

فإن $\det(A-\lambda I_n) = \det(f-\lambda Id)$ غير مرتبط بالأساس المختار للفضاء V.

Scanné avec CamScanner

نفرض أن $B_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ و $B_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$ أساسان لـ V

$A = M(f, B_1, B_1)$ و $B = M(f, B_2, B_2)$،

و P مصفوفة العبور من الأساس B_1 إلى الأساس B_2.

$$\Rightarrow \quad B = P^{-1} A P$$

$$\begin{aligned}
\det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1} A P - \lambda I_n) \\
&= \det(P^{-1} A P - \lambda P^{-1} P) \\
&= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n) P) \\
&= \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \det P \\
&= (\det P)^{-1} \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \det P \\
&= \det(A - \lambda I_n).
\end{aligned}$$

<u>نتيجة:</u> إذا كان

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فإن

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

تعريف : ليكن V ف. ش على K بعده n و $f: V \to V$ تطبيق خطي. و لتكن $A \in M_n(K)$ المصفوفة المرفقة لـ f في أساس معين.

نسمي المصفوفة $A - \lambda I_n$ بالمصفوفة المميزة لـ A

و نسمي $\det(A - \lambda I_n)$ بكثير الحدود المميز لـ A أو لـ f ، هو كثير حدود من الدرجة n ذو المتغير λ.

$$\boxed{P_A(\lambda) = \Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)}$$

مثال :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto (x + 2y, 4x + 3y)$$

المصفوفة المرفقة لـ f بالنسبة للأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$ هي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

تعيين القيم الذاتية لـ f.

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

كثير الحدود المميز لـ A هو $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$

$$P_A(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \iff (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

ومنه $\lambda_1 = -1$ ، $\lambda_2 = 5$ قيمتين ذاتيتين لـ f.

Scanné avec CamScanner

تعيين الفضاء الذاتي لـ λ_1.

$$V_{\lambda_1} = \ker(f - \lambda_1 Id)$$

V_{λ_1} هو مجموعة الأشعة $v=(x,y)$ التي تحقق

$$(f - \lambda_1 Id)(v) = 0 \iff (f + Id)(v) = 0$$

$$(A + I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\ker(f - \lambda_1 Id) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 2x + 4y = 0 \}$$
$$= \{ (-2y, y) / \ y \in \mathbb{R} \}$$
$$= \langle (-2,1) \rangle$$

ومنه $(-2,1)$ هو شعاع ذاتي مرفق للقيمة الذاتية $\lambda_1 = -1$، أي شعاع من الشكل $\alpha(-2,1)$ هو شعاع ذاتي مرفق لـ λ_1.

نظرية: ليكن V ف.ش ذو بعد منته على حقل K، و $f: V \to V$ تطبيق خطي. لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ قيم ذاتية مختلفة لـ f. و لتكن $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ أشعة ذاتية مرفقة للقيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. فإن الأشعة $\{x_1, \dots, x_k\}$ تكون مستقلة خطيا.

Scanné avec CamScanner

البرهان: نبرهن الخاصية بالتراجع على k.

إذا كان $k=1$ و x_1 شعاع ذاتي مرفق لـ λ_1 فهو غير معدوم ويكون مستقل خطيا.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $k=n-1$ ونبرهنها في حالة $k=n$.

نفرض أن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ قيم ذاتية مختلفة و $x_1, x_2, \dots, x_n$ أشعة ذاتية مرفقة لها. نفرض أن

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \quad \cdots (*)$$

$\alpha_i \in K$ ،

إذا كان $\alpha_n = 0$ فإن $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_{n-1} = 0$ (من خاصية التراجع).

$\Leftarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$

نفرض أن $\alpha_n \neq 0$ فإن α_n قابل للقلب ($\alpha_n \in K$).

$$\Rightarrow x_n = -\alpha_1 \alpha_n^{-1} x_1 + (-\alpha_2)\alpha_n^{-1} x_2 + \dots + (-\alpha_{n-1})\alpha_n^{-1} x_{n-1}$$

$$\Rightarrow x_n = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{n-1} x_{n-1}, \quad \beta_i = -\alpha_i \alpha_n^{-1}$$

$$\Rightarrow f(x_n) = f(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{n-1} x_{n-1})$$

$$= \beta_1 f(x_1) + \beta_2 f(x_2) + \dots + \beta_{n-1} f(x_{n-1}).$$

$$\Rightarrow \lambda_n x_n = \beta_1 \lambda_1 x_1 + \beta_2 \lambda_2 x_2 + \dots + \beta_{n-1} \lambda_{n-1} x_{n-1}$$

$$= \lambda_n (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{n-1} x_{n-1})$$

$$\Rightarrow (\beta_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \beta_{n-1} \lambda_{n-1} x_{n-1}) - (\lambda_n \beta_1 x_1 + \dots + \lambda_n \beta_{n-1} x_{n-1}) = 0$$

$$\Rightarrow \beta_1 (\lambda_1 - \lambda_n) x_1 + \beta_2 (\lambda_2 - \lambda_n) x_2 + \dots + \beta_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) x_{n-1} = 0$$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \beta_i (\lambda_i - \lambda_n) = 0, \forall i \in \{1,2,\dots,n-1\}$

حقل K

$\Rightarrow \beta_i = 0, \forall i \in \{1,2,\dots,n-1\} \wedge \lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$

$\Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i \in \{1,2,\dots,n-1\}$

بالتعويض في (*) نجد أن $\alpha_n x_n = 0 \Leftrightarrow x_n = 0_V$

وهذا غير صحيح لأن x_n شعاع ذاتي. ومنه $\alpha_n = 0$.

ملاحظة: إذا كان V ف.ش ذو بعد منته n على حقل K و $f: V \to V$ تطبيق خطي فإن $\det(A - \lambda I_n) = \det(f - \lambda Id)$

لا يعتمد على الأساس المختار لـ V.

نفرض أن $B_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و $B_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ أساسان لـ V

A هي المصفوفة المرفقة لـ f بالنسبة لـ B_1

B هي المصفوفة المرفقة لـ f بالنسبة لـ B_2.

P مصفوفة العبور من الأساس B_1 إلى الأساس B_2

فإن $\boxed{B = P^{-1} A P}$

$$\det(f - \lambda Id) = \det(B - \lambda I_m) = \det(P^{-1} A P - \lambda I_n)$$

$$= \det(P^{-1} A P - \lambda P^{-1} P) = \det(P^{-1}(A - \lambda I_n) P)$$

$$= \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \det P$$

$$= (\det P)^{-1} \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \det P = \det(A - \lambda I_n).$$

Scanné avec CamScanner

نظرية (كايلي - هاملتون)

ليكن V ف.ش د.بعد n على حقل K و f أندومورفيزم لـ V
فإن f جذرًا لكثير الحدود المميز لـ f.
وإذا كان $A \in M_n(K)$ المصفوفة المرفقة لـ f فإن A جذرًا
لكثير الحدود المميز لـ A.

البرهان : نفرض أن $A \in M_n(K)$ ، لدينا

$$P_A(X) = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$$

نفرض أن $B = adj(A - XI_n)$ (matrice adjointe ou comatrice)
بما كتابة المصفوفة B على شكل كثير حدود درجته
تتعدى $(n-1)$

$$B = B_{n-1}X^{n-1} + B_{n-2}X^{n-2} + \cdots + B_1 X + B_0$$

حيث B_i $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ مصفوفة مربعة من الدرجة n.

لدينا

$$(A - XI_n) \cdot adj(A - XI_n) = \det(A - XI_n) \cdot I_n$$

$$\Rightarrow (A - XI_n) \cdot B = P_A(X) \cdot I_n$$

$$\Rightarrow (A - XI_n)(B_{n-1}X^{n-1} + \cdots + B_1 X + B_0) = (X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \alpha_0) \cdot I_n$$

$$\Rightarrow AB_{n-1}X^{n-1} + \cdots + AB_1 X + AB_0 - B_{n-1}X^n + \cdots + B_1 X^2 + B_0 X =$$

$$X^n I_n + \alpha_{n-1}X^{n-1} I_n + \cdots + \alpha_0 I_n$$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} B_{n-1} = I_n \\ AB_{n-1} - B_{n-2} = \alpha_{n-1} I_n \\ \vdots \\ AB_2 - B_1 = \alpha_2 I_n \\ AB_1 - B_0 = \alpha_1 I_n \\ AB_0 = \alpha_0 I_n \end{cases}$$

نتحصل على n معادلة.

نضرب كل معادلة $A^{i+1} \leftarrow AB_{i+1} - B_i = \alpha_{i+1} I_n$ من اليسار $0 \leq i \leq n-1$ ، ونجمع كل المعادلات طرفا لطرف نجد:

$$A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0$$

ومنه A جذر لكثير الحدود المميز.

مثال: لتكن $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ التطبيق الخطي المرفق لها هو

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (2x, x+3y)$$

حساب كثير الحدود المميز

$$P_A(X) = \det(A - X I_2) = \det \begin{pmatrix} 2-X & 0 \\ 1 & 3-X \end{pmatrix}$$
$$= (2-X)(3-X)$$

$$\Rightarrow P_A(X) = X^2 - 5X + 6$$

نبرهن أن $A^2 - 5A + 6 = 0$

Scanné avec CamScanner

أحسب A^{-1}. بما أن $\alpha_0 \neq 0$ فإن A قابلة للقلب

$$A^2 - 5A + 6I_2 = 0 \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{5}{6} I_2 - \frac{1}{6} A}$$

$$A - 5I_2 + 6A^{-1} = 0 \Rightarrow$$

تعريف: لتكن $A \in M_n(K)$. نسمي كثير الحدود الواحدي (معامل الحد ذو الأعلى الدرجة يساوي 1) و الذي درجته أصغر ما يمكن و يحقق A جذر له بكثير الحدود الأصغري لـ A (polynôme minimal de A) و نرمز له بـ:

$$m_A(X)$$

ملاحظة: كثير الحدود الاصغري موجود دائما و هو وحيد.

الوجود: $P_A(X)$ كثير الحدود المميز يحقق الشرط.

الوحدانية: نفرض أن $m_1(X)$, $m_2(X)$ كثيرا حدود من الدرجة k و A جذر لهما. (k أصغر ما يمكن)

$m_1(X) - m_2(X)$ كثير حدود درجته

$\deg(m_1(X) - m_2(X)) \leq k-1$

و $m_1(A) - m_2(A) = 0$.

نقسم على معامل أعلى درجة في $m_1(X) - m_2(X)$ نتحصل على كثير حدود واحدي و A جذرا له. و هذا تناقض مع الفرض. و منه

$$m_1(X) - m_2(X) = 0 \Rightarrow \boxed{m_1(X) = m_2(X)}$$

Scanné avec CamScanner