الفصل III : تطبيقات

① حساب قوة مصفوفة أو أندومورفيزم.

لتكن A مصفوفة كيفية. من أجل حساب A^k، حيث $k \in \mathbb{N}^*$ فإننا نلجأ دائما إلى اختزال A إلى الشكل القطري أو المثلثي حتى تكون الحسابات أسهل ما يمكن.

إذا كان A' مصفوفة قطرية مشابهة لـ A.

فإن $A = PA'P^{-1}$ حيث P مصفوفة قابلة للقلب.

$$A^2 = (PA'P^{-1})(PA'P^{-1}) = PA'^2P^{-1}$$

بشكل عام، فإن

$$A^k = PA'^kP^{-1}$$

لدينا:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A'^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

② تطبيق الاختزال في حل الجمل التفاضلية الخطية

ليكن (s) جملة n معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى ذات معاملات ثابتة و n تابع مجهول

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$$

Scanné avec CamScanner

$$(S)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \varphi_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + \varphi_n(t) \end{cases}$$

حيث a_{ij} ثوابت، $\varphi_i(t)$ توابع معطاة، و t متغير حقيقي.

يمكن كتابة الجملة (S) على الشكل المصفوفي:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ \cdots\ a_{ij}\ \cdots \\ \vdots \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad \frac{dX}{dt} = AX + \Phi$$

إذا كانت A قابلة للتقطير (أو قابلة للتثليث) فإن الجملة (S) سوف تكتب على الشكل

$$\frac{dY}{dt} = BY + \Psi \quad / \quad X = PY,\ \Phi = P\Psi,\ A = PBP^{-1}$$

و P هي مصفوفة العبور.

مثال توضيحي: لتكن الجملة التفاضلية التالية:

$$(S)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 8y - 7z \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 4y - 4z \end{cases}$$

حيث $x, y, z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ توابع حقيقية قابلة للاشتقاق.

Scanné avec CamScanner

الجملة التفاضلية (5) يمكن كتابتها على الشكل

$$X' = AX \;,\; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\; A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -7 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

نعلم أن A قابلة للتقطير وهي مشابهة لـ D'

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X' = AX = PDP^{-1}X \Rightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$$

نضع $Y = P^{-1}X \Leftarrow Y' = DY$ ، $Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1' = x_1 \\ y_1' = -y_1 \\ z_1' = -2z_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c_1 e^{t} \\ y_1 = c_2 e^{-t} \\ z_1 = c_3 e^{-2t} \end{cases}$$

حيث $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

من أجل إيجاد التوابع x, y, z نحسب :

$$Y = P^{-1}X \Rightarrow X = PY = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{-t} \\ c_3 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-2t} \\ y(t) = -c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} \\ z(t) = 2c_2 e^{-t} + c_3 e^{-2t} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner