

Chapitre 0.1: Espaces Vectoriels

1.1 Espace Vectoriel

Déf 1.1: Soit $\mathbb{K}$ un Corps Commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
et soit E un ensemble muni d'une loi interne (+)

$$+ : E \times E \longrightarrow E$$

$$(u, v) \longmapsto u + v \in E$$

et d'une loi externe ($\cdot$): $\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$

$$(\lambda, u) \longmapsto \lambda \cdot u \in E$$

$(E, +, \cdot)$ est dit espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K}$ -e.v.) si :

1. $(E, +)$ est un groupe Commutatif.
2. La loi ($\cdot$) vérifie les conditions suivantes :

a. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E : \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.

b. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E : (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.

c. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E : (\lambda \cdot \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$.

d. $\forall u \in E : 1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$.

Remarque 1.1: Les éléments de E sont appelés **des vecteurs**.
Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **des scalaires**.

Exemple 1.1:

I/ Soit $E = \mathbb{R}^2 = \{ (x, y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

où la loi interne + et la loi externe $\cdot$ sont données par

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ car :

1. $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif. (La loi interne $+$ est commutative et associative, l'élément neutre est le vecteur nul $(0,0)$ et le symétrique de (x,y) est $(-x, -y)$).

2. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} a) \lambda \cdot [(x,y) + (x',y')] &= \lambda \cdot (x+x', y+y') \\ &= (\lambda(x+x'), \lambda(y+y')) \\ &= (\lambda \cdot x + \lambda \cdot x', \lambda \cdot y + \lambda \cdot y') \\ &= (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) + (\lambda \cdot x', \lambda \cdot y') \\ &= \lambda \cdot (x,y) + \lambda \cdot (x',y') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (\lambda + \mu) \cdot (x,y) &= ((\lambda + \mu)x, (\lambda + \mu)y) \\ &= (\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y) \\ &= (\lambda x, \lambda y) + (\mu x, \mu y) \\ &= \lambda \cdot (x,y) + \mu \cdot (x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) (\lambda \cdot \mu) \cdot (x,y) &= (\lambda \cdot \mu \cdot x, \lambda \cdot \mu \cdot y) = \lambda \cdot (\mu \cdot x, \mu \cdot y) \\ &= \lambda \cdot (\mu \cdot (x,y)) \end{aligned}$$

$$d) 1_{\mathbb{R}} \cdot (x,y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x,y)$$

II | Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction} \}$ (TD)
(Ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$)

La loi interne $(+)$ et la loi externe $(\cdot)$ sont données par :

$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $f+g$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda \cdot f$ est définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

$(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ car:

1. $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$ est un groupe commutatif. (La loi interne $+$ est commutative et associative, l'élément neutre est la fonction nulle, définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$, et le symétrique de f est l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -f(x)$$

2. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a:

$$\begin{aligned} \text{a) } \forall x \in \mathbb{R}, (\lambda \cdot (f+g))(x) &= \lambda \cdot (f+g)(x) \\ &= \lambda \cdot (f(x) + g(x)) \\ &= \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x) \\ &= (\lambda \cdot f + \lambda \cdot g)(x) \end{aligned}$$

donc $\lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \forall x \in \mathbb{R}, ((\lambda + \mu) \cdot f)(x) &= (\lambda + \mu) \cdot f(x) \\ &= \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(x) \\ &= (\lambda \cdot f)(x) + (\mu \cdot f)(x) \end{aligned}$$

donc $(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \forall x \in \mathbb{R}, (\lambda \cdot \mu \cdot f)(x) &= (\lambda \cdot \mu) \cdot f(x) \\ &= \lambda \cdot \mu \cdot f(x) \\ &= \lambda \cdot (\mu \cdot f)(x) \\ &= (\lambda \cdot (\mu \cdot f))(x) \end{aligned}$$

donc: $(\lambda \cdot \mu) \cdot f = \lambda \cdot (\mu \cdot f)$.

$$d) \forall x \in \mathbb{R} \quad (1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$$

$$\text{donc} \quad 1 \cdot f = f$$

proposition 1.1: Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. alors on a:

$$1) \forall u \in E: 0 \cdot u = 0_E \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K}: \lambda \cdot 0_E = 0_E$$

$$2) \forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}: \lambda \cdot (u - v) = \lambda u - \lambda v$$

$$3) \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E: \lambda \cdot u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } u = 0_E$$

1.2 sous-espace vectoriel

Déf 1.2: Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. et $F \subset E$.

F est dit sous-espace vectoriel de E si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes:

$$1) 0_E \in F \quad (F \neq \emptyset)$$

$$2) \forall u, v \in F, u + v \in F \quad (\text{on dit } F \text{ stable par } (+))$$

$$3) \forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot u \in F$$

proposition 1.2: F sous espace vectoriel de E ssi:

$$1) F \neq \emptyset$$

$$2) \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u, v \in F, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$$

Exemple 1.2:

1) Soit le $\mathbb{R}$ -e.v., $E = \mathbb{R}^3$

$$\text{Soit } F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$$

Montrons que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?

$$1) 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F?$$

$$0_{\mathbb{R}^3} \in F \text{ car } 0 - 0 + 0 = 0 \text{ vérifiée}$$

2/ Soit $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in F \Rightarrow u + v \in F$?

$$u \in F \Leftrightarrow x - y + z = 0$$

$$v \in F \Leftrightarrow x' - y' + z' = 0$$

On montre $u + v \in F \Leftrightarrow (x + x', y + y', z + z') \in F$.

Il suffit de montrer que : $x + x' - (y + y') + z + z' = 0$?

$$x + x' - (y + y') + z + z' = x - y + z + x' - y' + z' = 0 + 0 = 0$$

donc : $u + v \in F$

3/ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u = (x, y, z) \in F, \lambda \cdot u \in F$?

On montre que : $\lambda \cdot u = \lambda \cdot (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in F$.

Il suffit de montrer que : $\lambda x - \lambda y + \lambda z = 0$?

$$\lambda x - \lambda y + \lambda z = \lambda (x - y + z) = \lambda \cdot 0 = 0$$

donc : $\lambda \cdot (x, y, z) \in F$.

d'où F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

II/ Soit $F_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, F_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

F_1 et F_2 sont des s.e.v de $\mathbb{R}^2$

1/ $0_{\mathbb{R}^2} \in F_1$? $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$

$0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F$ car la 2^{ème} composante est nulle.

2/ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u = (x, 0), v = (x', 0) \in F, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F_1$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u + \mu \cdot v &= \lambda \cdot (x, 0) + \mu \cdot (x', 0) = (\lambda x, 0) + (\mu x', 0) \\ &= (\lambda x + \mu x', 0) \in F_1 \end{aligned}$$

Donc d'après la proposition 1.2, F_1 est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

De même, on montre que F_2 est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

Proposition 1.3: Soient F, G deux espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

- L'intersection $F \cap G$ est aussi un sous-espace vectoriel de E .
- La réunion $F \cup G$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E .

Exemple 1.3: Soient $F_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $F_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, la réunion $F_1 \cup F_2 = \{(x, 0), (0, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ car $\exists (1, 0), (0, 1) \in F_1 \cup F_2$ mais $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F_1 \cup F_2$.

Définition 1.3: Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v., F, G deux s.e.v. de E .

1/ La partie $F + G = \{w \in E : w = u + v \mid u \in F, v \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E , dit somme de F et G .
Si $F \cap G = \{0_E\}$, cette somme est dite directe et noté $F \oplus G$.

2/ Si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$, alors on dit que E est une somme directe de F et G , ou encore F et G sont supplémentaires dans E et on écrit $E = F \oplus G$.

Exemple 1.4:

I/ Soient $F = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $G = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Montrons que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

a/ Montrons que $F \cap G = \{(0, 0)\}$.

Si $(x, y) \in F \cap G$, alors d'une part $(x, y) \in F$ donc $y = 0$,
et aussi $(x, y) \in G$ donc $x = 0$. Ainsi $(x, y) = (0, 0)$.

b) Montrons que $F + G = \mathbb{R}^2$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) \quad / \quad (x, 0) \in F \text{ et } (0, y) \in G$$

donc, $\mathbb{R}^2 = F + G$ d'où : $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.

1.3 Combinaisons linéaires :

Définition 1.4 : Une famille de vecteurs $\{v_1, \dots, v_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ d'un e.v. E est dite **génératrice** si : $\forall v \in E : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ et v est dit **combinaison linéaire** des vecteurs $v_1, \dots, v_n$.

Exemple 1.5 :

1. Dans le $\mathbb{R}$ -e.v. $\mathbb{R}^3$, $u = (3, 3, 1)$ est combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$ et $v_2 = (1, 1, 1)$ car :

$$\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3 \quad \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

$$\Rightarrow (3, 3, 1) = \lambda_1 (1, 1, 0) + \lambda_2 (1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow (3, 3, 1) = (\lambda_1, \lambda_1, 0) + (\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2)$$

$$\Rightarrow (3, 3, 1) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

donc, $u = (3, 3, 1) = 2(1, 1, 0) + (1, 1, 1)$.

2. $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \\ = x e_1 + y e_2$$

3. $E = \mathbb{R}^n$, la famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ est $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Déf 1.5: un K -e.v E est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Si non, on dit qu'il est de dimension infinie

Exemple 1.6

1. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ sont des e.v de dimension finie.
2. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un e.v de dimension infinie
3. $E = \mathbb{R}[x]$ est un e.v de dimension infinie.

1.4 Famille libre, Famille liée et bases.

Déf 1.6: Soit $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ une famille finie d'un e.v. E sur K .

A est dite famille libre si pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

On dit aussi que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont linéairement indépendants, si non, on dit que A est une famille liée et que les vecteurs $v_1, \dots, v_p$ sont linéairement dépendants.

Exemple 1.7:

1. $E = \mathbb{R}^2$, $B = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ est une famille libre

$$\text{Car: } \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0) \Rightarrow (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = (0,0)$$

$$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$$

2. $E = \mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (1, -2, 2)$, $v_3 = (2, 0, 1)$ est une famille liée car :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \dots (*)$$

$$\Rightarrow \lambda_1(1, 1, -1) + \lambda_2(1, -2, 2) + \lambda_3(2, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 - 2\lambda_2, -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & \text{--- (1)} \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 & \text{--- (2)} \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \text{--- (3)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_3 = -\lambda_2 \end{cases} \text{ avec } \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$(*) \Leftrightarrow \lambda_2 v_1 + \lambda_2 v_2 - \lambda_2 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow v_1 + v_2 - v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Remarque 1.2 :

1. Une famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est liée si et seulement si il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tq $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E$

Dans l'exemple précédent, on a trouvé que $v_1 + v_2 - v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ ($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$) : on peut écrire : $v_3 = v_1 + v_2$ ou $v_2 = -v_1 + v_3$ ---

2. De la remarque 1), il existe au moins un vecteur x_i qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs

Définition 1.7: (Base d'un espace vectoriel)

Soit E un K -espace vectoriel. On appelle base de E , toute famille $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de vecteurs de E qui est à la fois libre et génératrice de E .

Proposition 1.4: Toutes les bases d'un K -e.v. de dimension finie E , ont le même cardinal appelé la dimension de E , noté $\dim_K E$ ou $\dim E$.

Remarque 1.3: Si $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ une base de E alors tout vecteur $x \in E$, s'écrit d'une façon unique sur les x_i : c.à.d. $\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n : x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$

Exemple 1.8

1/ $E = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (dite la base Canonique).

En général: $E = \mathbb{R}^n$, $\dim \mathbb{R}^n = n$, $B = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ dite base Canonique de $\mathbb{R}^n$, $\dim \mathbb{R}^n = n$

2/ $E = \mathbb{R}_2[X] = \{p = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

$B = \{p_1 = 1, p_2 = X, p_3 = X^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

$$\forall p \in \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow p = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 = a_0 \cdot 1 + a_1 X + a_2 X^2 \Rightarrow$$

$p_1 = 1, p_2 = X, p_3 = X^2$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$

$$\begin{aligned} \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0 &\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 X + \lambda_3 X^2 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

→ La famille $\{p_1, p_2, p_3\}$ est libre

donc $B = \{p_1=1, p_2=x, p_3=x^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$

dite la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$

En général : $E = \mathbb{R}_n[x] = \{p \in \mathbb{R}[x] : d^0(p) \leq n\}$ admet comme base canonique la base $B = \{p_1=1, p_2=x, \dots, p_{n+1}=x^n\}$
 $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$.

Remarque 1.4 : Soit E un e.v de dimension n ($\dim E = n$)

1/ $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base $\Leftrightarrow B$ libre $\Leftrightarrow B$ génératrice de E

2/ Si $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ tel que $p > n$ alors B est liée si de plus B est génératrice, on peut extraire une famille

$C = \{v_1, \dots, v_n\}$ base pour E .

Exemple 1.9 :

1/ $E = \mathbb{R}^3 : B = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (0, 1, -1)\}$

comme $\text{Card } B = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, alors pour montrer que B est une base il suffit de montrer qu'elle est soit libre, soit génératrice ?

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 (1, 1, 1) + \lambda_2 (1, 1, 0) + \lambda_3 (0, 1, -1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3) = (0, 0, 0).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

d'où B est libre

d'où B est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit le s.e.v $F = \{(x+y, x-z, -y-z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$
Trouver une base de F (c.à.d une famille génératrice libre)
Comme $F \subset \mathbb{R}^3$ alors $\dim F \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

$$\text{Soit } X = (x+y, x-z, -y-z) \in F \Leftrightarrow X = (x, x, 0) + (y, 0, -y) + (0, -z, -z) \\ \Rightarrow X = x(1, 1, 0) + y(1, 0, -1) + z(0, -1, -1)$$

ainsi, la famille $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de F
si B est libre alors B sera une base?

B est-elle libre?

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \quad \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_3, -\lambda_2 - \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_1 \\ \lambda_3 = \lambda_1 \end{cases} \text{ avec } \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

donc $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille liée

donc d'après la remarque 2), on peut extraire une base de F ? on doit chercher deux vecteurs de B qui sont libres, si il n'existe pas deux vecteurs de B libres alors on prend un vecteur non nul de B et ce dernier sera une base de F .

$$\text{de (*) on a : } \lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_2 + \lambda_1 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow v_1 - v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

donc : $v_3 = -v_1 + v_2$, alors on choisit $B_1 = \{v_1, v_2\}$
et on étudie si B_1 est libre?

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$\Rightarrow B_1$ est libre donc B_1 est une base de F .

Théorème 1.1: Soit E un e.v de dimension n ($\dim E = n$)
 F est un s.e.v de E alors:

1/ $\dim F \leq n = \dim E$

2/ $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$.

3/ $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Exemple 1.10: Soit $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.

$$F = \{(x+y+z, y+z, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\forall X = (x+y+z, y+z, z) = x \underbrace{(1, 0, 0)}_{v_1} + y \underbrace{(1, 1, 0)}_{v_2} + z \underbrace{(1, 1, 1)}_{v_3}$$

La famille $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ est donc une famille génératrice, on peut montrer facilement qu'elle est libre donc B forme une base de F et donc $\dim F = 3 = \dim \mathbb{R}^3$
 d'après 2/ du théorème précédent $F = \mathbb{R}^3$

Théorème 1.2: Soit E un e.v tel que $\dim E = n$.

F_1, F_2 deux s.e.v de E alors:

$$E = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} B_1 \cup B_2 \text{ est une base de } E. \\ \dim F_1 + \dim F_2 = \dim E \end{cases}$$

Exemple 1.11:

$$E = \mathbb{R}^3, F_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, B_1 = \{(1, 0, 0)\}$$

$$F_2 = \{(0, y, -z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}, B_2 = \{(0, 1, 0), (0, 0, -1)\}$$

1. $\dim F_1 + \dim F_2 = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

2. $B = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 2, 0), v_3 = (0, 0, -1)\}$ forme une
base de $\mathbb{R}^3$
de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$