

Chapitre 02: Applications linéaires

2.1 Applications linéaires

Définition 2.1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application de E dans F . On dit que f est linéaire si et seulement si :

- 1/ $\forall u_1, u_2 \in E, f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$
- 2/ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

ou d'une manière équivalente, si :

$$\forall u_1, u_2 \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda f(u_1) + \mu f(u_2)$$

Exemple 2.1 :

1/ On considère l'application f définie par :

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \longmapsto (x+y, x-y, 2y)$$

alors : $\forall u_1 = (x, y) \in \mathbb{R}^2, u_2 = (x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda u_1 + \mu u_2) &= f(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= (\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y', 2\lambda y + 2\mu y') \\ &= \lambda(x+y, x-y, 2y) + \mu(x'+y', x'-y', 2y') \\ &= \lambda f(x, y) + \mu f(x', y') \\ &= \lambda f(u_1) + \mu f(u_2). \end{aligned}$$

D'où f est linéaire.

2/ $f: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$

$$p(x) \longmapsto f(p(x)) = p'(x)$$

f est une application linéaire. Cas:

$$1/ \forall p, q \in \mathbb{R}[X]: f(p+q) = (p+q)' = p' + q' = f(p) + f(q)$$

$$2/ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{R}[X]: f(\lambda p) = (\lambda p)' = \lambda \cdot p' = \lambda \cdot f(p)$$

proposition 2.1: Soit $f: E \rightarrow F$ une A.L. alors,

$$1/ f(0_E) = 0_F$$

$$2/ \forall x \in E: f(-x) = -f(x)$$

2.2 Noyau et Image d'une application linéaire

Définition 2.2: Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire
($f \in \mathcal{L}(E, F)$)

1/ L'image de f est l'ensemble noté $\text{Im } f$ tel que

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= f(E) = \{y \in F: \exists x \in E: y = f(x)\} \\ &= \{f(x) \mid x \in E\} \end{aligned}$$

2/ Le noyau de f est l'ensemble noté $\text{Ker } f$ défini par:

$$\text{Ker } f = \{x \in E: f(x) = 0_F\}$$

proposition 2.2: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

1/ Le noyau $\text{Ker } f$ est un s.e.v de E

2/ L'image $\text{Im } f$ est un s.e.v de F

proposition 2.3: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1/ f est injective $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0_E\}$.

2/ f est surjective $\Leftrightarrow \text{Im } f = F$

Exemple 2.1:

$$1) f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x + 2y, x - y)$$

$$\star \text{Ker } f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \}$$

$$f(x, y) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow (x + 2y, x - y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 & \dots (1) \\ x - y = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow y = 0, \text{ on remplace dans (2) on trouve}$$

$$x = 0 \Rightarrow \text{Ker } f = \{ (0, 0) \} = \{ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \}.$$

donc f est injective

$$\star \text{Im } f = \{ f(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} = \{ (x + 2y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}.$$

$$= \{ x(1, 1) + y(2, -1) \mid x, y \in \mathbb{R} \} = \langle v_1 = (1, 1), v_2 = (2, -1) \rangle$$

$$B = \{ v_1, v_2 \} \text{ est une base de } \text{Im } f, \dim \text{Im } f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

$$\text{d'où } \text{Im } f = \mathbb{R}^2 \Rightarrow f \text{ est surjective}$$

$$2) f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (x + y, -x + y, 2x)$$

$$\star \text{Im } f = \{ f(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \} = \{ (x + y, -x + y, 2x) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ x(1, -1, 2) + y(1, 1, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle v_1 = (1, -1, 2), v_2 = (1, 1, 0) \rangle$$

$$B = \{ v_1, v_2 \} \text{ forme une base de } \text{Im } f \subsetneq \mathbb{R}^3$$

donc f n'est pas surjective

$$\star \text{Ker } f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \}$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + y, -x + y, 2x) = (0, 0, 0) \}$$

$$\text{Ker } f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x+y=0 \\ -x+y=0 \\ 2x=0 \end{array} \right\} = \{(0, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

donc f est injective

$$\text{3) } f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \quad / p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$p \longmapsto f(p) = p'$$

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{ p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : p' = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \} \\ &= \{ p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_1 + 2a_2 x = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \} \\ &= \{ p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_1 = 0, a_2 = 0 \} \\ &= \{ p = a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R} \neq \{0\} \end{aligned}$$

f n'est pas injective

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \{ f(p) \mid p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \} \\ &= \{ a_1 + 2a_2 x \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

$$\text{on pose : } a_1 = b_0, 2a_2 = b_1$$

$$\text{Im } f = \{ b_0 + b_1 x \mid b_0, b_1 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}_1[x] \neq \mathbb{R}_2[x]$$

f n'est pas surjective

Définition 2.3: Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que f est un:

- Endomorphisme si $F = E$ (c-à-d $f \in \mathcal{L}(E)$).
- Isomorphisme si elle est bijective $f \in \mathcal{L}(E, F)$
- Automorphisme si elle est bijective et $F = E$
- Forme linéaire si $F = \mathbb{K}$, i.e., $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

2.3 Applications linéaires en dimension finie

Proposition 2.4: Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ une famille de vecteurs de E .

- 1/ Si f injective et B libre $\Rightarrow f(B)$ libre
- 2/ Si f surjective et B famille génératrice de E alors $f(B)$ famille génératrice de F .
- 3/ Si f bijective, B base de $E \Leftrightarrow f(B)$ base de F .

Exemple 2.3:

1/ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (x+y, -x+y, 2x)$$

$B_{\mathbb{R}^2} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ est une famille libre

(car c'est la base canonique de $\mathbb{R}^2$). et f injective

alors $f(B) = \{f(e_1) = (1, -1, 2), f(e_2) = (1, 1, 0)\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

2/ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (x+2y, x-y)$$

f est bijective $\begin{cases} f \text{ injective} \\ f \text{ surjective} \end{cases}$

$\mathcal{A}$ image de la base canonique $B = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$

$f(B) = \{f(e_1) = (1, 1), f(e_2) = (2, -1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2.1: (Théorème de la dimension)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$

alors, $\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$.

Définition 2.1: (Rang d'une application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de f , noté $\text{rg}(f)$, la dimension de $\text{Im}(f)$, i.e.

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

Théorème 2.2: (Théorème du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors:

$$\dim E = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)).$$

Proposition 2.5: Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- i) Si f est injective, alors $\dim(E) \leq \dim(F)$.
- ii) Si f est surjective, alors $\dim(F) \leq \dim(E)$.
- iii) Si f est bijective, alors $\dim E = \dim F$.

Théorème 2.3: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et que $\dim(F) = \dim(E)$, alors:

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

Exemple 2.4:

$$1/ f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x + y, y + z)$$

$$\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}\} = \{(x, y, z) : \begin{matrix} x = -y \\ z = -y \end{matrix}\}$$

$$\text{Ker } f = \{(-y, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \langle v_1 = (-1, 1, -1) \rangle \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$\dim \text{Ker } f = 1$, f n'est pas injective

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f = 3 - 1 = 2$$

$\dim \text{Im } f = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{Im } f = \mathbb{R}^2$ et f surjective

$$2/ f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$p = a + bx + cx^2 \mapsto f(p) = (a, b, c)$$

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{p = a + bx + cx^2 \mid f(p) = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid (a, b, c) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid a = b = c = 0\} = \{0_{\mathbb{R}_2[x]}\} \end{aligned}$$

donc f est injective, et comme $\dim \mathbb{R}_2[x] = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

alors f est bijective