Université Mohammed Seddik Benyahia-Jijel-
Faculté des Sciences de la Nature et de la vie
Année universitaire : 2023-2024
1ère année Agronomie
Module : Algèbre 2

Série de TD N°1

Exercice n°1.
Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{fonction}\}$, muni de la loi de composition interne $+$ définie comme suit :

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

et la loi de composition externe $\cdot$ définie comme suit :

$$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

Montrer que $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°2.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E tel que :
1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + 3z = 0\}$ et $E = \mathbb{R}^3$.
2. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) = P(2)\}$ et $E = \mathbb{R}_3[X]$.
3. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1) = 0\}$ et $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice n°3.
Dans les deux cas suivants dire si la famille $A \subset E$ est libre ou bien liée.
1. $A = \{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, 3, 1), v_3 = (3, 1, 2)\}$ et $E = \mathbb{R}^3$.
2. $A = \{P_1(X) = 1 + X + X^2, P_2(X) = 1 - X + 2X^2, P_3(X) = -1 + 3X - 3X^2\}$ et $E = \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice n°4.
Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(-X) = P(X)\}$ un espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$
1. Déterminer une base de F et déduire sa dimension.
2. Montrer que $\{P_1(X) = 1 + 3X^2, P_2(X) = 5 - X^2\}$ est une base de F.
3. Montrer que $G = \langle X, X^3 \rangle$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice n°5.
Soit le sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + 3z = 0\}$

1. Déterminer une base de F et déduire sa dimension.
2. Supposons que G est un sous-espace supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer sa dimension.
3. Déterminer un sous-espace supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$.

Résponsable du module
Dr.HARROUCHE Nesrine