Université Mohammed Seddik Benyahia-Jijel-
Faculté des Sciences de la Nature et de la vie
Année universitaire : 2023-2024
$1^{\text{ère}}$ année Agronomie
Module : Algèbre 2

Série de TD N°3

Exercice n°1.
Considérons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice transposée de A, notée A^t.
2. Déterminer la matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $A - B = A^t$.
3. Calculer $A \times A^t$ et $A^t \times A$. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice n°2.
Considérons les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} ; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs a et b tel que $A^2 = a.A + b.I_3$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.

Exercice n°3.
Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

Exercice n°4.
Dans les deux cas suivants dire si la famille A est libre ou bien liée.
$A = \{v_1 = (2, -1, 1), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (1, 1, 1)\}$
$A = \{P_1 = 1 - X + X^2, P_2 = 2 + X - 2X^2, P_3 = 3 - X^2\}$

Exercice n°5.
Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $rg(B)$.

2. Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

Exercice n°6.

Soient $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $b = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et A la matrice de f dans la base B

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'expression $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de f, $kerf$ et déduire le rang de f.
3. Soit $B' = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (1, 0, 1)\}$. Déterminer la matrice de passage de la base B à la base B', qu'on note P, et calculer P^{-1}.
4. Déterminer la matrice $A' = M_f(B', B')$ matrice de f dans la base B'.

Exercice n°7.

Soit le système suivant :

$$(P) \begin{cases} 2x - y + z = a \\ x + 4y - 3z = b \\ x + y = c \end{cases} \qquad \text{tel que } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

1. Écrire le système (P) sous la forme matricielle $B = A \times X$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
2. Montrer que le système (P) admet une solution unique.
3. En utilisant la méthode de cramer déterminer la solution du système (P).
4. Ecrire le vecteur (x, y, z) sous la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D. \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

où D est une matrice à déterminer, puis déduire A^{-1} la matrice inverse de A.

Résponsable du module
Dr.HARROUCHE Nesrine