

Faculté des sciences et de la technologie

Département : G-M

Module : DDS

Option : Licence construction mécanique

Resp. : H. BOUNIE

CHAP II : Vibrations forcées non amorties de
structures à 1 ddl sous chargement :

- harmonique
- Périodique

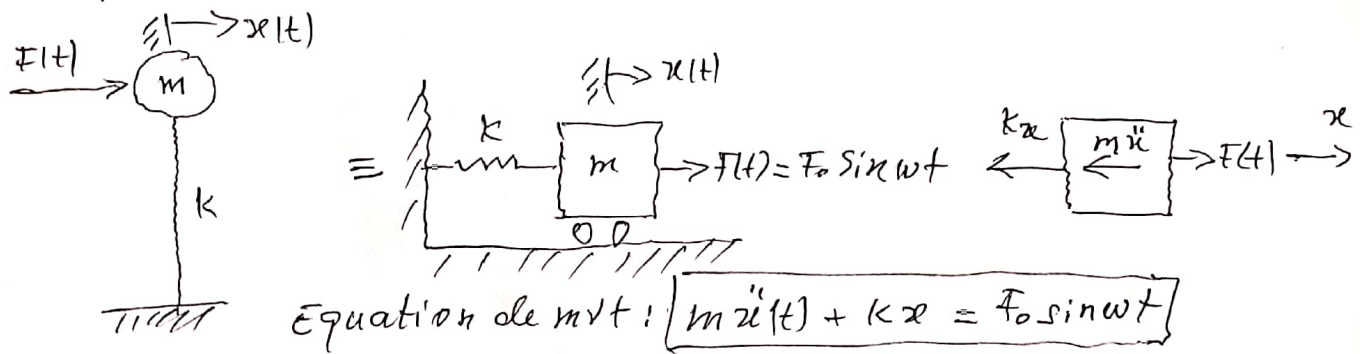
Temps Alloué : 4 Semaines et plus $\rightarrow$ 5

CHAP II: Vibrations forcées non amorties d'une structure à 1 ddf

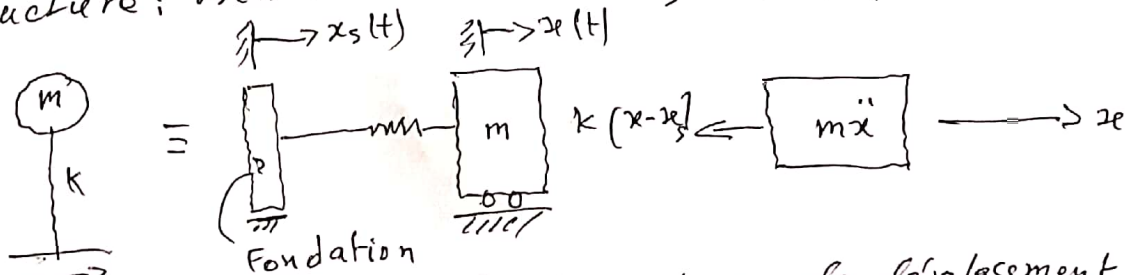
L'étude des vibrations d'une structure à 1 ddf c'est l'étude de vibrations de son modèle mathématique équivalent (voir chap 1) qui est celui d'un oscillateur harmonique équivalent. Dans ce cas (Chapitre II) il est proposé de négliger l'amortissement. L'amortissement bien qu'il est très faible dans les structures il existe toujours.

A) Vibrations forcées non amorties sans chargement harmonique
Un chargement harmonique (voir chap 1) peut être: un

a) un chargement direct (balourd d'une machine), donné par exemple
par: $F(t) = F_0 \sin \omega t$ ou un moment $M(t) = M_0 \sin \omega t$



b) Un chargement indirect dû au mvt de la fondation de la structure: $x_s(t) = x_0 \sin \omega t$ ou $\ddot{x}_s = \ddot{x}_0 \sin \omega t$



* Equation de mvt en terme de déplacement absolu $x(t)$: $m \ddot{x} + k(x - x_s) = 0 \Rightarrow m \ddot{x} + kx = kx_s = kx_0 \sin \omega t = F_0 \sin \omega t$

* Equation de mvt en terme de déplacement relatif $u(t)$ de m/Fond. $F_0 = kx_0$

$u(t) = x - x_s \Rightarrow \ddot{u}(t) = \ddot{x}(t) - \ddot{x}_s(t) \Rightarrow \ddot{x}_s(t) = \ddot{u}(t) + \ddot{x}_s(t)$
d'où $m \ddot{u}(t) + ku = -m \ddot{x}_s(t) = m x_0 \omega^2 \sin \omega t = F_0 \sin \omega t$
 $F_0 = m x_0 \omega^2$

c) Intégration de l'équation de mvt
 Dans ce point l'amortissement est négligé et les conditions initiales
 sont considérées nulles. On s'intéresse alors à la réponse
 permanente vu que la réponse transitoire plane avec le temps
 à cause de l'amortissement.

1. chargement direct: $F(t) = F_0 \sin \omega t$

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \omega t, \quad x_p(t) = x(t) = X \sin \omega t$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 X \sin \omega t$$

$$-m\omega^2 X \sin \omega t + kX \sin \omega t = F_0 \sin \omega t \quad \text{d'où:}$$

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} : \text{Amplitude de réponse permanente}$$

qu'on mette sous la forme:

$$X = \frac{F_0/k}{1 - \frac{m}{k}\omega^2} = \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{F_0/k}{1 - r^2}$$

ou: $x_{st} = \frac{F_0}{k}$ réponse statique

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsation naturelle du système

$r = \frac{\omega}{\omega_n}$ (I) $\left[X = \frac{x_{st}}{1 - r^2} \right], \quad x(t) = X \sin \omega t$

de l'équation (I) on définit un facteur D appelé facteur
 d'amplification dynamique

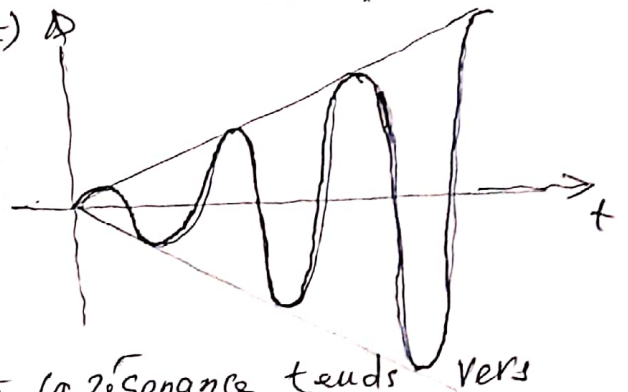
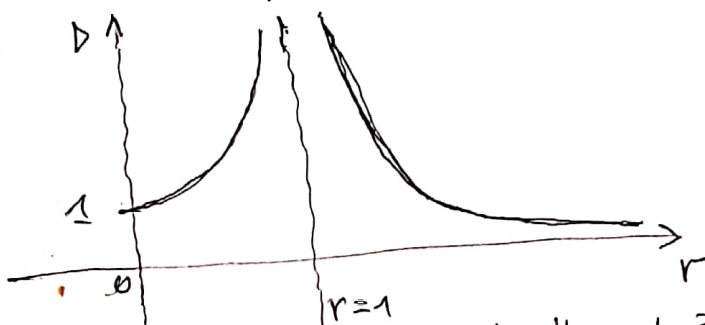
$$D = \frac{X}{x_{st}} = \frac{1}{1 - r^2}$$

$D \rightarrow \infty$ pour $r = 1$ à la résonance

$D = 1$ pour $r = 0$

$D \rightarrow 0$ pour $r \rightarrow \infty$

on remarque qu'en absence de l'amortissement $D \rightarrow \infty$ à la
 résonance $\rightarrow X \rightarrow \infty$



Rq: Un système (structure) vibrant à la résonance tends vers
 sa destruction.

2. chargement indirect, équation de mvt en terme de déplacement absolu

$$m\ddot{x} + kx = Kx_s = KX_0 \sin \omega t, \quad x_p(t) = x(t) = X \sin \omega t$$

$$-m\omega^2 X \sin \omega t + KX \sin \omega t = KX_0 \sin \omega t, \quad \text{donc :}$$

$$X = \frac{KX_0}{K - m\omega^2} = \frac{X_0}{1 - \frac{m}{K}\omega^2} = \frac{X_0}{1 - r^2}$$

$$\boxed{X = \frac{X_0}{1 - r^2}} \quad (\text{II})$$

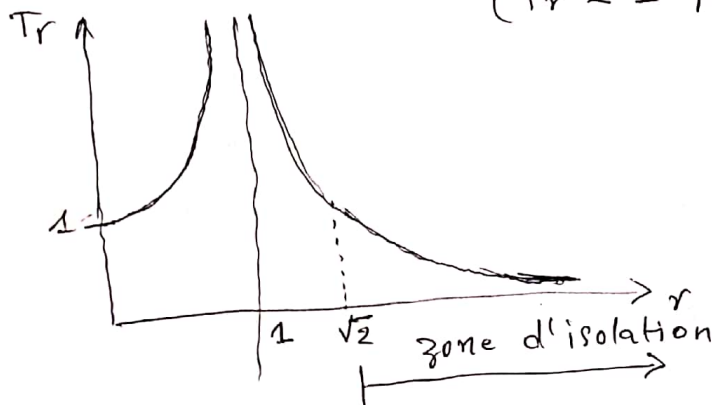
de l'équation (II) on définit un rapport $\frac{X}{X_0} = Tr$

appelé transmissibilité : $\boxed{Tr = \frac{X}{X_0} = \frac{1}{1 - r^2}} = \frac{X}{X_0}$

$Tr \rightarrow \infty$ pour $r=1$ (à la résonance)

$Tr = 1$ pour $r=0$ (système très rigide)

$Tr = 1$ pour $r=\sqrt{2}$, $Tr \rightarrow 0$ pour $r \rightarrow \infty$
($Tr < 1$ pour $r > \sqrt{2}$)



• Isolation contre vibrations

d'après le graphique de la transmissibilité on remarque que pour $r \gg \sqrt{2}$, $Tr \ll 1 \Rightarrow X \ll X_0$. Dans ce cas on préfère un système d'isolation de faible rigidité (mou). Dans la pratique on préfère parler d'efficacité d'amortissement e tel que :

$$e = 1 - Tr, \quad Tr = \frac{1}{r^2 - 1} \quad (r > \sqrt{2})$$

$$e = 1 - \frac{1}{r^2 - 1} \Rightarrow r \geq \sqrt{\frac{2-e}{1-e}}, \quad \frac{\omega}{\omega_n} \geq \sqrt{\frac{2-e}{1-e}} \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{\omega^2(1-e)}{(2-e)}$$

$$\Rightarrow K \leq \frac{m\omega^2(1-e)}{(2-e)} \quad \text{rigidité de l'isolateur ou système d'isolation.}$$

3) chargement indirect: equation de mvt en terme de déplacement relatif $u(t)$.

$$m\ddot{u} + Ku = F_0 \sin \omega t, \quad u(t) = U \sin \omega t, \quad \ddot{u}(t) = -\omega^2 U \sin \omega t$$

d'ou l'amplitude du mvt relatif U est donné par :

$$U = \frac{F_0}{K - m\omega^2} = \frac{F_0/K}{1 - \frac{m}{K}\omega^2} = \frac{mX_0\omega^2/K}{1 - \frac{m}{K}\omega^2} = \frac{r^2 X_0}{1 - r^2}, \quad r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

de cette amplitude on définit un rapport :

$$\frac{U}{X_0} = \frac{r^2}{1 - r^2}$$

Pour $r \approx 0$, $\frac{U}{X_0} = 0 \Rightarrow U = 0$ (système très rigide)

Pour $r \approx 1$ (Résonance) $\frac{U}{X_0} \rightarrow \infty \Rightarrow U \rightarrow \infty$

Pour $r \rightarrow \infty$, $\frac{U}{X_0} = 1 \Rightarrow U = X_0$

Rq: Un système de faible rigidité (mou), $r \gg 1$, peut servir de vibromètre pour mesure des déplacements de sols.

Revenons au rapport $\frac{U}{X_0} = \frac{r^2}{1 - r^2} = \frac{(\frac{\omega}{\omega_n})^2}{1 - r^2}$ d'où :

$$\frac{\omega_n^2 U}{\omega^2 X_0} = \frac{\omega_n^2 U}{\ddot{X}_0} = \frac{1}{1 - r^2} = D, \quad \ddot{X}_0 : \text{Amplitude de l'accélération de la Fondation.}$$

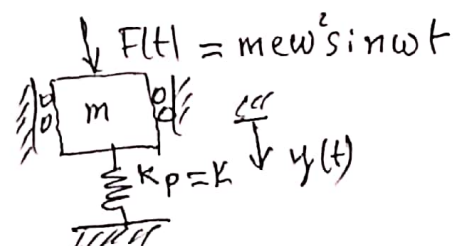
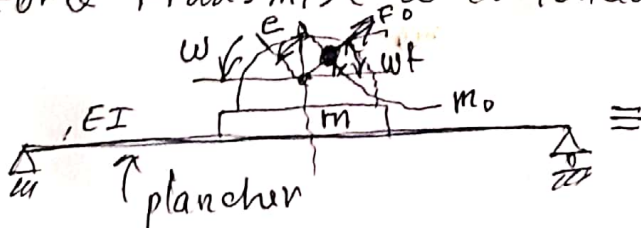
Pour $r \leq 0,3$ (système très rigide)

$$\frac{\omega_n^2 U}{\ddot{X}_0} \approx 1 \Rightarrow \ddot{X}_0 = \omega_n^2 U \quad \text{alors si } U \text{ est connue}$$

d'amplitude l'accélération du sol (Fondation) est connue

Rq: Un système de grande rigidité, $r \leq 0,3$, peut servir d'accéléromètre pour mesure des accélérations du sol.

d) Force transmise à la Fondation d'une machine vibrante.



Soit une machine rotative qui génère un effort de balourd dû à un couple massique non équilibré $m_0 e$, m_0 : masse non équilibrée, e : excentricité de m_0 / à l'axe de rotation (voir chap 1)
 cette machine est placée sur un plancher de rigidité locale sous la machine k . L'effort généré à la rotation de la machine est $F_0 = m_0 e \omega^2$, cet effort est rotatif et on le décompose suivant x et y tel que: $F_x(t) = F_0 \cos \omega t = m_0 e \omega^2 \cos \omega t$

Dans ce point les vibrations ^{importantes} $F_y(t) = F_0 \sin \omega t = m_0 e \omega^2 \sin \omega t$ sont les vibrations transversales dues à $F_y(t) = F_0 \sin \omega t = F(t)$

L'équation de mvt suivant y est alors:

$$m \ddot{y} + k y = F_0 \sin \omega t, \quad y(t) = Y \sin \omega t, \quad \ddot{y}(t) = -\omega^2 Y \sin \omega t$$

$$Y = \frac{F_0}{k - m \omega^2} = \frac{m_0 e \omega^2}{k - m \omega^2} = \frac{\frac{m_0 e \omega^2}{k}}{1 - \frac{m}{k} \omega^2}$$

Si on multiplie les 2 membres par la masse m de la machine

$$m Y = \frac{m_0 e \frac{m}{k} \omega^2}{1 - \frac{m}{k} \omega^2} = \frac{m_0 e r^2}{1 - r^2} \Rightarrow \boxed{\frac{m Y}{m_0 e} = \frac{r^2}{1 - r^2}}$$

Pour $r = 0$ ($\omega \ll \omega_n$), $\frac{m Y}{m_0 e} \approx 0 \Rightarrow Y \rightarrow 0$ (amplitude de vibrations très faible)

Pour $r = 1$ ($\omega = \omega_n$) Résonance $Y \rightarrow \infty$

Pour $r \rightarrow \infty$ ($\omega \gg \omega_n$) $\frac{m Y}{m_0 e} \rightarrow 1 \Rightarrow m Y = m_0 e \Rightarrow Y = \frac{m_0}{m} e$

Rq: Pour réduire les vibrations engendrées par le balourd, la machine doit travailler à $\omega > \omega_n$ (amplitude de vibrations très faible).

($\omega \geq 1.15 \omega_n$)

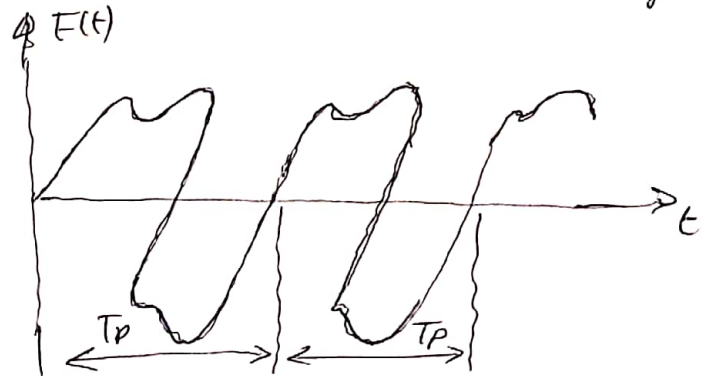
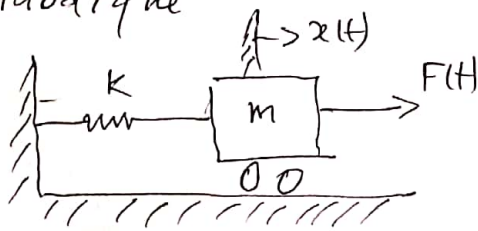
Revenons à $Y = \frac{F_0}{k - m \omega^2}$ Si on multiplie les deux membres

par k on aura: $k Y = \frac{F_0}{1 - r^2}$ $F_t = k Y$: amplitude de la force transmise à la fondation

$$F_t = k Y = \frac{F_0}{1 - r^2} \Rightarrow \boxed{\frac{F_t}{F_0} = T_r = \frac{1}{1 - r^2}}$$

Si $r \rightarrow 0$, $\frac{F_t}{F_0} = 1 \Rightarrow F_t = F_0$, $r = 1$ (Resonance), $F_t \rightarrow \infty$
 $r \rightarrow \infty$, $F_t \rightarrow 0$. (on transmet moins pour $r \gg 1$, $\omega \gg \omega_n$)

B) Réponse d'une structure à 1 ddl non amortie à un chargement Périodique



Equation de mvt :

$$m\ddot{x}(t) + kx = F(t)$$

Un chargement périodique peut être créé par une machine à plusieurs balourds. par exple. ce chargement de période T_p et de pulsation fondamentale $\omega = \frac{2\pi}{T_p}$ (pulsation de la 1^{ère} harmoniq.) peut être décomposé en séries de Fourier tel que :

$$F(t) = \frac{1}{2}F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \quad \text{ou}$$

$$F(t) = \frac{1}{2}F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\omega t + \alpha_n), \quad F_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \tan \alpha_n = \frac{B_n}{A_n}$$

$$\text{ou} \quad F_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) dt, \quad A_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) \cos n\omega t dt$$

$$B_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) \sin n\omega t dt$$

La réponse à ce chargement est la superposition des réponses de ses harmoniques

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) = x_0 + x_1(t) + x_2(t) + \dots$$

$$x_n(t) = \frac{F_n/k}{\left(1 - \frac{n\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \sin(n\omega t + \alpha_n), \quad x_0 = \frac{1/2 F_0}{k}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n/k}{\left(1 - \frac{n\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \sin(n\omega t + \alpha_n)$$

Rq: - La réponse est dominée par la superposition de réponses de harmoniques de pulsations proches de la pulsation naturelle ω_n .
Le phénomène de résonance aura lieu si une de ces pulsations coïncide avec ω_n .

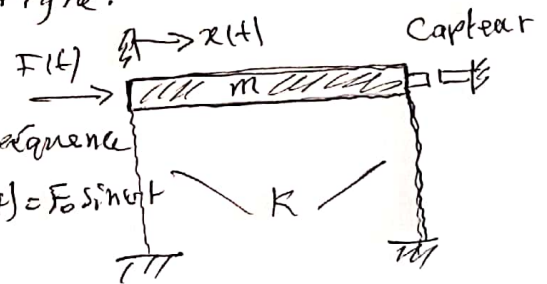
- la solution analytique aura lieu pour $F(t)$ simple et intégrable si non on fait une intégration numérique.

Exercice 1 Pour déterminer m et K

d'un portique on a utilisé un excitateur à fréquence variable qui génère une force harmonique $F(t) = F_0 \sin \omega t$

Pour $\omega = 16 \text{ rad/s}$ on mesure $X_1 = 1,8 \text{ mm}$

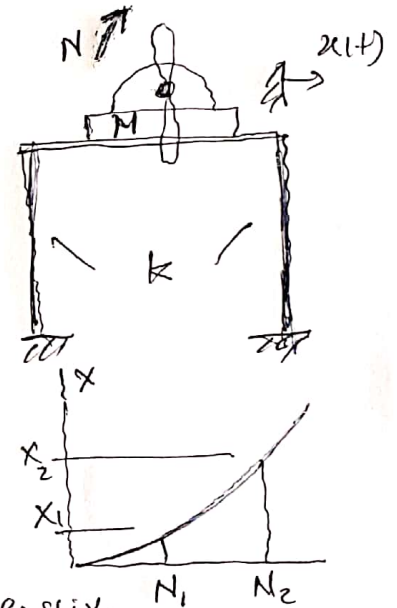
Pour $\omega = 25 \text{ rad/s}$ " " $X_2 = 3,68 \text{ mm}$, si $F_0 = 227 \text{ N}$, déterminez la rigidité et la masse du portique.



Exercice 2 : Sur un portique est placé un moteur entraînant un ventilateur industriel. L'ensemble platine + moteur + ventilateur est d'une masse $M = 1000 \text{ kg}$. L'effort de balourd est donné par $F(t) = m_0 e \omega^2 \sin \omega t$, $\omega = \frac{\pi N}{30}$.

En marche à : $N_1 = 400 \text{ tr/min}$, $X_1 = 4 \text{ mm}$

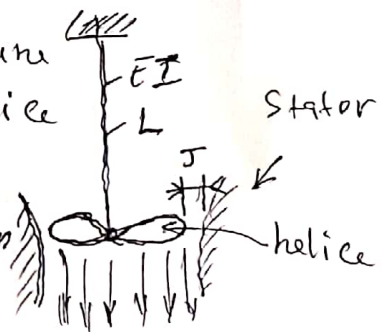
$N_2 = 500 \text{ tr/min}$, $X_2 = 11,6 \text{ mm}$



vu que l'amplitude de vibration devienne excessive on arrête et procède à renforcer le portique. De combien de fois faut-il renforcer le portique ($K' = nK$) pour pouvoir travailler à $N_3 = 520 \text{ tr/min}$ sans que l'amplitude X_3 dépasse 2 mm .

Exercice 3 : Déterminer le diamètre de l'arbre d'une turbine à hélice pour que le jeu J entre l'hélice et le stator soit respecté pendant le service.

On donne : $E = 200 \text{ GPa}$, $L = 0,5 \text{ m}$, $m_0 e = 0,1 \text{ kg.mm}$
masse de l'hélice $m = 100 \text{ kg}$.



Exercice 4 : Un moteur de fréquence $f = 60 \text{ Hz}$ et de masse $m = 200 \text{ kg}$ est placé sur un plancher. la flèche statique du plancher une fois le moteur placé est de $0,13 \text{ mm}$. En service à 1800 tr/min , recommandez-vous une isolation vibratoire.

Exercice 5: A l'extrémité libre d'une console et placé un moteur de masse $m = 50 \text{ kg}$, qui génère un chargement périodique de la forme F . Pour $L = 1 \text{ m}$, $EI = 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^2$, déterminer $y(t)$. Dire si la structure résiste à ce chargement si la flèche admissible ne doit pas dépasser 1 mm .

