

تصحيح السلسلة رقم 02: طريقة التحليل بالمركبات الأساسية (ACP) Analyse en Composante Principale

التمرين 01:

1. هل يمكن تحليل الجدول السابق باستعمال طريقة التحليل بالمركبات الأساسية البسيطة (ACP – Non Normés)؟ برر إجابتك؛
في الجدول السابق كل المتغيرات لها نفس وحدات القياس فهي متجانسة و بالتالي يمكننا تحليل الجدول السابق بطريقة التحليل بالمركبات الأساسية البسيطة (ACP – Non normé) .

2. باستعمال هذه الطريقة حلل الجدول المقترح؛

إن تطبيق طريقة التحليل بالمركبات الأساسية البسيطة (ACP – Non Normé) يتضمن الخطوات التالية:
الخطوة (1): حساب المتوسطات الحسابية للمتغيرات

$$\bar{\eta}_1 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \eta_{i1} = \frac{10+8+9+14+11+10}{6} = 10.33$$

$$\bar{\eta}_2 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \eta_{i2} = \frac{6+10+7+8+11+8}{6} = 8.33$$

$$\bar{\eta}_3 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \eta_{i3} = \frac{11+7+9+6+10+12}{6} = 9.17$$

المتغيرات	η_1	η_2	η_3
المتوسطات الحسابية	10.33	8.33	9.17

و عليه فان إحداثيات مركز سحابة النقاط هي: $g(10.33;8.33;9.17)$

الخطوة (2): حساب مصفوفة التباين و التباين المشترك

في البداية نستخرج المصفوفة الممركزة X على النحو التالي:

$$\begin{aligned} X_{(6,3)} &= \begin{pmatrix} \eta_{11} - \bar{\eta}_1 & \eta_{12} - \bar{\eta}_2 & \eta_{13} - \bar{\eta}_3 \\ \eta_{21} - \bar{\eta}_1 & \eta_{22} - \bar{\eta}_2 & \eta_{23} - \bar{\eta}_3 \\ \eta_{31} - \bar{\eta}_1 & \eta_{32} - \bar{\eta}_2 & \eta_{33} - \bar{\eta}_3 \\ \eta_{41} - \bar{\eta}_1 & \eta_{42} - \bar{\eta}_2 & \eta_{43} - \bar{\eta}_3 \\ \eta_{51} - \bar{\eta}_1 & \eta_{52} - \bar{\eta}_2 & \eta_{53} - \bar{\eta}_3 \\ \eta_{61} - \bar{\eta}_1 & \eta_{62} - \bar{\eta}_2 & \eta_{63} - \bar{\eta}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 - 10.33 & 06 - 8.33 & 11 - 9.17 \\ 08 - 10.33 & 10 - 8.33 & 07 - 9.17 \\ 09 - 10.33 & 07 - 8.33 & 09 - 9.17 \\ 14 - 10.33 & 08 - 8.33 & 06 - 9.17 \\ 11 - 10.33 & 11 - 8.33 & 10 - 9.17 \\ 10 - 10.33 & 08 - 8.33 & 12 - 9.17 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.33 & -2.33 & 1.83 \\ -2.33 & 1.67 & -2.17 \\ -1.33 & -1.33 & -0.17 \\ 3.67 & -0.33 & -3.17 \\ 0.67 & 2.67 & 0.83 \\ -0.33 & -0.33 & 2.83 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

إن المصفوفة أعلاه تعبر عن إحداثيات الأفراد في المعلم ذو المبدأ مركز سحابة النقاط.

$$V = \frac{X'X}{n} = \begin{pmatrix} 3.56 & -0.11 & -1.22 \\ -0.11 & 2.89 & -0.89 \\ -1.22 & -0.89 & 4.47 \end{pmatrix}$$

حساب مصفوفة التباين و التباين المشترك:

من مصفوفة التباين و التباين المشترك يمكننا أن نستنتج أن تباين المتغير الأول هو 3.56 أما تباين المتغير الثاني فهو 2.89 و بالنسبة للمتغير الثالث هو 4.47. أما التباينات المشتركة بين المتغيرات فهي -0.11 بين المتغير الأول و الثاني أما بين الأول و الثالث فهو -1.22 و بين الثاني و الثالث فهو -0.89. و هذا يدل على أن كل المتغيرات لها علاقة عكسية فيما بينها.

الخطوة (3) : حساب القيم الذاتية

نقوم بحساب القيم الذاتية من مصفوفة التباين و التباين المشترك من العلاقة التالية:

$$|V - \lambda I_3| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3.56 - \lambda & -0.11 & -1.22 \\ -0.11 & 2.89 - \lambda & -0.89 \\ -1.22 & -0.89 & 4.47 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3.56 - \lambda & -0.11 & -1.22 \\ -0.11 & 2.89 - \lambda & -0.89 \\ -1.22 & -0.89 & 4.47 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

لدينا: $\lambda_1 = 5.5$ و $\lambda_2 = 3.29$

كما أن: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Trace}(V) = 10.92 \Rightarrow \lambda_3 = 2.13$

الخطوة (4) : حساب نسب التمثيل على المحاور

الجدول التالي يلخص نسب التمثيل على المحاور:

رقم المحور	القيمة الذاتية	نسبة التمثيل على المحاور	النسبة التجميعية
1	5.5	50.37%	50.37%
2	3.29	30.11%	80.48%
3	2.13	19.52%	100%
المجموع	10.92	100%	/

أي أن 50.37% من بيانات الجدول الأولي للمعطيات $R(6,3)$ ممثلة على المحور (Δ_1) . و 30.11% من بيانات الجدول الأولي للمعطيات $R(6,3)$ ممثلة على المحور (Δ_2) . ومنه 80.48% من بيانات الجدول الأولي للمعطيات $R(6,3)$ ممثلة على المستوي الأول $(\Delta_1 \otimes \Delta_2)$. و هي نسبة مقبولة للتمثيل و الدراسة.

الخطوة (5) : إيجاد الأشعة الذاتية الوحدوية

نعمل على إيجاد الأشعة الذاتية المرافقة للقيم الذاتية من العلاقة: $(V_{(3,3)} - \lambda_\alpha I_3) \times U_\alpha = \underline{0}_3$

الشعاع الذاتي الأول لما: $\lambda_1 = 5.5$

$$(V - \lambda_1 I_3) = \underline{0}_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1.94 & -0.11 & -1.22 \\ -0.11 & -2.61 & -0.89 \\ -1.22 & -0.89 & -1.03 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1.94u_{11} + 0.11u_{12} + 1.22u_{13} = 0 \dots\dots\dots(1) \\ 0.11u_{11} + 2.61u_{12} + 0.89u_{13} = 0 \dots\dots\dots(2) \\ 1.22u_{11} + 0.89u_{12} + 1.03u_{13} = 0 \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

$$(1) \times 0.11 \Rightarrow 0.2134u_{11} + 0.0121u_{12} + 0.1342u_{13} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

$$(2) \times 1.94 \Rightarrow 0.2134u_{11} + 5.0634u_{12} + 1.7266u_{13} = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$(4) - (5) \Rightarrow u_{12} = -0.315u_{13} \dots\dots\dots(6)$$

نعوض النتيجة (6) في المعادلة (1) نجد أن: $u_{11} = -0.611u_{13}$

نعوض هذه النتائج في الشعاع الذاتي الأول نجد أن:

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.611u_{13} \\ -0.315u_{13} \\ u_{13} \end{pmatrix} = u_{13} \begin{pmatrix} -0.611 \\ -0.315 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U_1 = \begin{pmatrix} -0.611 \\ -0.315 \\ 1 \end{pmatrix}$$

و لدينا طولية الشعاع الذاتي U_1 هي: $\|U_1\| = \sqrt{(-0.611)^2 + (-0.315)^2 + 1} = 1.213 \neq 1$ يكون شعاع وحدوي:

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{-0.611}{1.213} \\ \frac{-0.315}{1.213} \\ \frac{1}{1.213} \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} -0.504 \\ -0.259 \\ 0.824 \end{pmatrix} \text{ شعاع ذاتي وحدوي ومنه:}$$

و بنفس الطريقة نجد أن:

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0.702 \\ -0.678 \\ 0.216 \end{pmatrix} \text{ شعاع وحدوي الشعاع الذاتي الثاني لما: } \lambda_2 = 3.29 \text{ يكون:}$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0.508 \\ 0.688 \\ 0.524 \end{pmatrix} \text{ شعاع وحدوي الشعاع الذاتي الثالث لما: } \lambda_3 = 2.13 \text{ يكون:}$$

الخطوة (6) : إحداثيات الأفراد على المحاور

$$F_\alpha = X \times U_\alpha$$

نعمل على حساب إحداثيات الأفراد على المحاور من العلاقة:

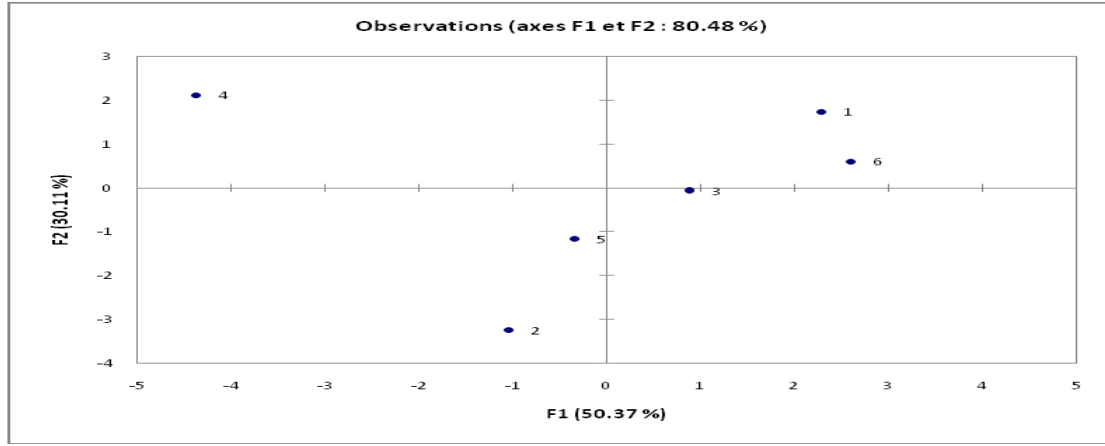
$$F_1 = X \times U_1 \text{ على المحور الأول:}$$

$$F_2 = X \times U_2 \text{ على المحور الثاني:}$$

$$F_3 = X \times U_3 \text{ على المحور الثالث:}$$

و الجدول التالي يلخص إحداثيات الأفراد على المحاور:

الأفراد	F1	F2	F3
1	2.2837	1.7439	-0.8124
2	-1.0428	-3.2373	-1.1615
3	0.8797	-0.0686	-1.6747
4	-4.3698	2.1182	-0.0436
5	-0.3403	-1.1599	2.6055
6	2.5893	0.6037	1.0867



و في إطار التعليق على هذا التمثيل لبياني فانه يمكننا القول أن كل الأفراد تمثيلهم مقبول على هذا المستوي ما عدا الفردين الثالث و الخامس بسبب قريهم من المبدأ، حيث انه يمكننا أن نميز الأفراد الأول، الرابع و السادس تمثيلهم جيد على المحور الأول الفردين الأول و السادس بإحداثية موجبة و الفرد الرابع بإحداثية سالبة. أما على المحور الثاني فالفرد الثاني بإحداثيات سالبة و الفردين الأول و الرابع بإحداثيات موجبة هما الأفضل تمثيل على هذا المحور.

الخطوة (8) : نسب تمثيل الأفراد على المحاور

يمكننا أن نحسب نسب تمثيل الأفراد على المحور α من العلاقة التالية: $d^2(g,i) = \sum_{\alpha=1}^p F_{\alpha}^2(i)$; $\cos^2 \theta_{i\alpha} = \frac{F_{\alpha}^2(i)}{d^2(g,i)}$

$$\cos^2 \theta_{i1} = \frac{F_1^2(i)}{d^2(g,i)} ; d^2(g,i) = \sum_{\alpha=1}^3 F_{\alpha}^2(i) \quad \text{على المحور الأول:}$$

$$\cos^2 \theta_{i2} = \frac{F_2^2(i)}{d^2(g,i)} ; d^2(g,i) = \sum_{\alpha=1}^3 F_{\alpha}^2(i) \quad \text{على المحور الثاني:}$$

$$\cos^2 \theta_{i3} = \frac{F_3^2(i)}{d^2(g,i)} ; d^2(g,i) = \sum_{\alpha=1}^3 F_{\alpha}^2(i) \quad \text{على المحور الثالث:}$$

و الجدول التالي يلخص نتائج الحساب:

الأفراد	$\cos^2 \theta_{i1}$	$\cos^2 \theta_{i2}$	$\cos^2 \theta_{i3}$	المجموع
1	0.5849	0.3411	0.0740	%100
2	0.0842	0.8114	0.1045	%100
3	0.2160	0.0013	0.7827	%100
4	0.8097	0.1902	0.0001	%100
5	0.0140	0.1631	0.8229	%100
6	0.8127	0.0442	0.1431	%100

فالقيمة $\cos^2 \theta_{41} = 0.8097$ تمثل نسبة تمثيل الفرد الرابع على المحور الأول أي حوالي 81% من هذا الفرد ممثلة على المحور الأول، و حوالي 19% من هذا الفرد ممثلة على المحور الثاني، أما على المحور الثالث تقريباً معدومة. و بالتالي فان مجموع نسب تمثيل هذا الفرد على المحاور هو 100% .

و في إطار التعليق على هذا الجدول فإننا نلاحظ أن الفردين الرابع و السادس هما الأفضل تمثيل على المحور الأول، أما عن المحور الثاني فإننا نميز فقط الفرد الثاني.

$$C_i^\alpha = \frac{F_\alpha^2(i)}{\sum_{i=1}^n F_\alpha^2(i)} = \frac{F_\alpha^2(i)}{6\lambda_\alpha} \quad \text{يمكننا أن نحسب نسب مساهمة الأفراد في تشكيل المحور } \alpha \text{ من العلاقة التالية:}$$

$$C_i^1 = \frac{F_1^2(i)}{\sum_{i=1}^n F_1^2(i)} = \frac{F_1^2(i)}{6\lambda_1} \quad \text{على المحور الأول:}$$

$$C_i^2 = \frac{F_2^2(i)}{\sum_{i=1}^n F_2^2(i)} = \frac{F_2^2(i)}{6\lambda_2} \quad \text{على المحور الثاني:}$$

$$C_i^3 = \frac{F_3^2(i)}{\sum_{i=1}^n F_3^2(i)} = \frac{F_3^2(i)}{6\lambda_3} \quad \text{على المحور الثالث:}$$

و الجدول التالي يلخص نتائج الحساب:

الأفراد	C_i^1	C_i^2	C_i^3
1	15.8081	15.4201	5.1622
2	3.2958	53.1378	10.5522
3	2.3459	0.0239	21.9364
4	57.8771	22.7489	0.0148
5	0.3510	6.8213	53.0983
6	20.3222	1.8480	9.2360
المجموع	100%	100%	100%

الأفراد الذين لهم أكبر نسب مساهمة في تشكيل المحور الأول هم: الفرد الأول بنسبة قدرها حوالي 16 % و الفرد الرابع بنسبة قدرها حوالي 58 % و الفرد السادس بنسبة قدرها حوالي 20 % ، أي أن الأفراد الثلاثة يساهمون في تشكيل هذا المحور بنسبة قدرها حوالي 94 % و هي نسبة كبيرة جداً، و هذا يدل على الدور الكبير لهذه الأفراد في إنشاء هذا المحور و هذا بعكس بقية الأفراد. أما عن المحور الثاني فالفردين الثاني و الرابع لهما دور كبير في تشكيل هذا المحور الفرد الثاني بنسبة قدرها 53 % و الفرد الرابع بنسبة قدرها حوالي 23 %.

الخطوة (10) : إحداثيات المتغيرات على المحاور

$$G_\alpha = X'V_\alpha \quad \text{يمكننا أن نحسب إحداثيات المتغيرات على المحور } \alpha \text{ من العلاقة التالية:}$$

$$G_1 = X'V_1 \quad \text{على المحور الأول:}$$

$$G_2 = X'V_2 \quad \text{على المحور الثاني:}$$

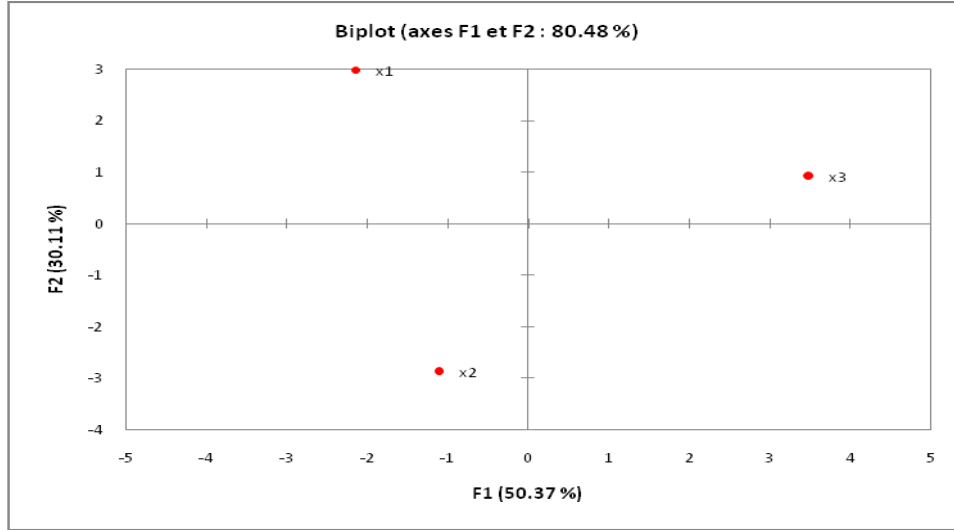
$$G_3 = X'V_3 \quad \text{على المحور الثالث:}$$

$$G_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha} U_\alpha \quad \text{أو الاستعانة بعبارات الانتقال:}$$

و الجدول التالي يلخص نتائج الحساب:

المتغيرات	G1	G2	G3
x1	-1.1808	1.2737	0.7340
x2	-0.6080	-1.2294	1.0039
x3	1.9325	0.3915	0.7643

الخطوة (11) : التمثيل البياني للمتغيرات



3. تحديد إحداثيات الفرد الإضافي الطالب 7 على المستوى المقترح:

لدينا: $R^+ = (12 ; 08 ; 16)$ يكون:

$$\Rightarrow X^+ = (12 - 10.33 ; 8 - 8.33 ; 16 - 9.17)$$

$$X^+ = (1.67 ; -0.33 ; 6.83)$$

يكون:

$$F_1^+(9) = X^+ U_1 = (1.67 \quad -0.33 \quad 6.83) \times \begin{pmatrix} -0.504 \\ -0.259 \\ 0.824 \end{pmatrix} = 4.87$$

$$F_2^+(9) = X^+ U_2 = (1.67 \quad -0.33 \quad 6.83) \times \begin{pmatrix} 0.702 \\ -0.678 \\ 0.216 \end{pmatrix} = 2.87$$

التمرين 02:

1. حساب القيمة الذاتية الثالثة λ_3 :

$$\sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} = \text{Trace}(C) \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 \Rightarrow \lambda_3 = 0$$

إعطاء تفسير لهذا المحور:

القيمة الذاتية الثالثة معدومة مما يعني أن الشعاع الذاتي الثالث تافه كما أن المحور الثالث مهم، وهذا يجعل من نسبة التمثيل على هذا المحور معدومة.

2. نرغب في هذا الفرع إلى إعادة تشكيل العناصر الأصلية لمصفوفة الارتباطات C :

1.2 حساب معاملات ارتباط المتغيرات مع المركبتين الأساسيتين الأولى و الثانية:

$$G_{\alpha} = \sqrt{\lambda_{\alpha}} U_{\alpha} \quad \alpha = 1, 2 \quad \text{باستعمال علاقة الانتقال التالية:}$$

نجد أن:

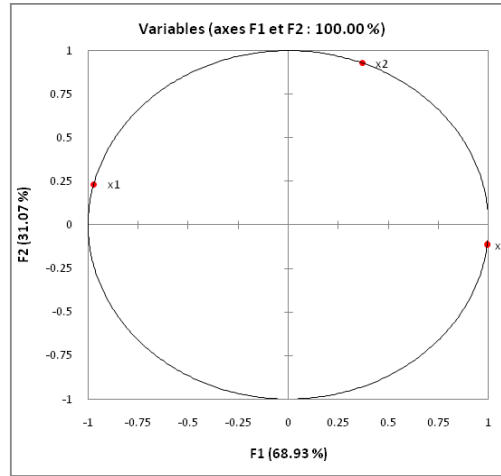
$$\alpha = 1 \Rightarrow G_1 = \sqrt{\lambda_1} \times U_1 = \sqrt{2.0678} \times \begin{pmatrix} -0.6763 \\ 0.2561 \\ 0.6907 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.9725 \\ 0.3683 \\ 0.9931 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 2 \Rightarrow G_2 = \sqrt{\lambda_2} \times U_2 = \sqrt{0.9322} \times \begin{pmatrix} 0.2411 \\ 0.9629 \\ -0.1209 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2328 \\ 0.9297 \\ -0.1167 \end{pmatrix}$$

و الجدول التالي يلخص إحداثيات المتغيرات على المحورين الأول و الثاني:

المتغيرات	$G_1(j)$	$G_2(j)$
X_1	- 0.9725	0.2328
X_2	0.3683	0.9297
X_3	0.9931	- 0.1167

التمثيل البياني للمتغيرات:



التعليق على التمثيل البياني:

نلاحظ أن كل المتغيرات الثلاثة تقع بالقرب من محيط دائرة الارتباطات مما يعني أنها ممثلة أحسن تمثيل على هذا المستوي $(G_1 \otimes G_2)$.
و من خلال ملاحظة المسافة بين المتغيرات يمكننا القول أن المتغير X_2 مستقل عن البقية و نكتب: $r_{2,1} \cong r_{2,3} \cong 0$ و ذلك لان:
 $d(X_1, X_2) \cong d(X_2, X_3) \cong \sqrt{2}$ ، وعلى أساس أن المسافة أعظمية بين المتغيرين X_1 و X_3 : $d(X_1, X_3) \cong 2$ فان العلاقة بين هاتين المتغيرين قوية وسالبة ونكتب: $r_{3,1} \cong -1$.

أما العلاقة بين المركبات الأساسية و المتغيرات فانه من خلال التمثيل البياني نظهر المركبة الأولى ارتباط قوي مع المتغيرين X_1 و X_3 مع الأول سالبة $G_1(1) = -0.9725$. أما الثالث فموجبة $G_1(3) = 0.9931$ ، غير أنها مستقلة عن المتغير X_2 . و بالنسبة للعلاقة بين المركبة الأساسية الثانية فهي ترتبط ارتباط قوي و موجب مع المتغير X_2 و مستقلة عن البقية.

2.2. إذا كنا نعلم أن كل المتغيرات تقع على سطح كرة مركزها المبدأ و نصف قطرها الواحد، فالعلاقة التي تمكننا من حساب المسافة الحقيقية بين المتغيرين j و j' في الفضاء هي:

$$d(j, j') = \sqrt{(G_1(j) - G_1(j'))^2 + (G_2(j) - G_2(j'))^2}$$

حساب المسافات الحقيقية في الفضاء بين المتغيرات الثلاث مثلى مثلى:

$$d(1,2)=1.5111 \quad 3.2. \text{ قدم العلاقة}$$

$$,d(1,3)=1.9965$$

$$,d(2,3)=1.2189$$

التي تمكننا من حساب معامل الارتباط الخطي البسيط بين المتغيرين j و j' انطلاقاً من المسافة بينهما:

$$r_{(j,j')} = 1 - d^2(j, j')/2 \quad \text{الإجابة:}$$

استنتج الآن معاملات الارتباط الخطي البسيط بين المتغيرات السابقة: الإجابة: 0.75 pts

$$r(1,2) = -0.1417$$

$$,r(1,3) = -0.9930$$

$$,r(2,3) = 0.2572$$

و عليه تكون مصفوفة الارتباطات (قيم حقيقية وليست تقريبية) من الشكل: الإجابة:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -0.1417 & -0.9930 \\ & 1 & 0.2572 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

3. إكمال الجدول المذكور في الفرع "ج" مع التبرير:

الأفراد	$F_1(i)$	$F_2(i)$	$F_3(i)$	$\cos^2(\theta_1)$	$\cos^2(\theta_2)$	$\cos^2(\theta_3)$
1	-0.6632	1.0237	0.000	0.2956	0.7044	0.000
2	2.4028	-0.2932	0.000	0.9853	0.0147	0.000
3	1.3302	1.3773	0.000	0.4826	0.5174	0.000
4	-1.3302	-1.3773	0.000	0.4826	0.5174	0.000
5	-2.4028	0.2932	0.000	0.9853	0.0147	0.000
6	0.5370	-0.8354	0.000	0.2924	0.7076	0.000
7	-0.5370	0.8354	0.000	0.2923	0.7077	0.000
8	0.6632	-1.0238	0.000	0.2956	0.7044	0.000

التبرير:

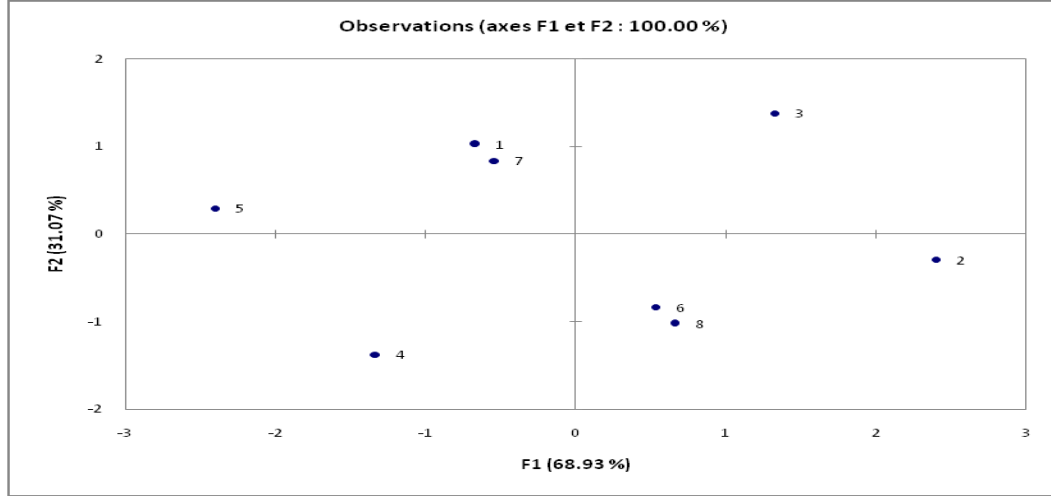
بالنسبة لإيجاد قيم $F_1(2)$, $F_2(7)$ نستعمل الخاصية: $\bar{F} = 0$

بالنسبة لإيجاد قيم $F_3(i)$ نستعمل الخاصية: $F_3(i) = XU_3 = 0$ لان الشعاع U_3 تافه.

بالنسبة لإيجاد قيم $\cos^2(\theta_3)$ نستعمل الخاصية: $\cos^2 \theta_{i3} = \frac{F_3^2(i)}{d^2(g,i)}$ $\wedge$ $F_3(i) = 0$

بالنسبة لإيجاد قيم $\cos^2(\theta_2)$ نستعمل الخاصية: $\sum_{\alpha=1}^3 \cos^2(\theta_{i\alpha}) = 1$

التمثيل البياني للأفراد على المستوى الأول : $(F_1 \otimes F_2)$



1.3. نسبة التمثيل على المستوي الأول:

$$Cr(F_1 \otimes F_2) = (\lambda_1 + \lambda_2) / It = 100\%$$

الشرح: 100% من بيانات الجدول الأولي R ممثلة على المستوى الأول ولا يوجد فقدان لأي معلومة في هذا المستوي.

2.3. يمثل مبدأ المحاور F_1 , F_2 مركز سحابة النقط g

التبرير:

وذلك لأننا استعملنا في تحليل الجدول R طريقة التحليل بالمركبات الأساسية المرجحة (ACP- Normé) و التي تقتضي نقل المعلم إلى مركز البيانات g .

4. من خلال الربط بين التمثيل البياني للأفراد و المتغيرات أكمل ما يلي مع التبرير:

- من بين كل الأفراد الفرد الذي يملك طول اكبر و اقل سعة رئوية للتنفس هو: 5

التبرير: الفرد 5 ممثل أحسن تمثيل على المركبة F_1 و بقيمة سالبة، كما أن F_1 ترتبط ارتباط قوي و سالب مع متغيرة الطول X_1 و ارتباط قوي و موجب مع متغيرة السعة الرئوية X_3 مما يجعل من الفرد 5 يأخذ اكبر القيم على X_1 و اقل القيم على X_3 .

- من بين كل الأفراد الفرد الذي يملك طول اقل و اكبر سعة رئوية للتنفس هو: 2

التبرير: الفرد 2 ممثل أحسن تمثيل على المركبة F_1 و بقيمة موجبة، كما أن F_1 ترتبط ارتباط قوي و سالب مع متغيرة الطول X_1 و ارتباط قوي و موجب مع متغيرة السعة الرئوية X_3 مما يجعل من الفرد 2 يأخذ اقل القيم على X_1 و اكبر القيم على X_3 .

- من بين كل الأفراد الفردين اللذين يملكن اكبر وزن هما: 1 و 3

التبرير: الفردين 1 و 3 ممثلين أحسن تمثيل على المركبة F_2 و بقيم موجبة كما أن هاتي المركبة لها ارتباط قوي و موجب مع متغيرة الوزن X_2 مما يعني أن الفردين 1 و 3 هما الأكبر وزناً من بين كل الأفراد على الإطلاق.

5. إذا علمت أن الفرد الإضافي (9) يملك المواصفات التالية: الوزن 74.0874 كغ، الطول 180.6846 سم و السعة الرئوية للتنفس هي 3.5466 ل.

تحدد إحداثيات هذا الفرد على المستوى الأول $(F_1 \otimes F_2)$.

إحداثيات الفرد الإضافي (9) لدينا:

$$R^+ = (180.6846 ; 74.0874 ; 3.5466)$$

$$\Rightarrow X^+ = \left(\frac{180.6846 - 170}{10.6846} ; \frac{74.0874 - 65.0001}{9.0873} ; \frac{3.5466 - 3.0010}{0.5456} \right)$$

$$X^+ = (1 ; 1 ; 1)$$

يكون:

$$F_1^+(9) = X^+ U_1 = (1 \ 1 \ 1) \times \begin{pmatrix} -0.6763 \\ 0.2561 \\ 0.6907 \end{pmatrix} = 0.2704$$

$$F_2^+(9) = X^+ U_2 = (1 \ 1 \ 1) \times \begin{pmatrix} 0.2411 \\ 0.9629 \\ -0.1209 \end{pmatrix} = 1.0832$$

أي أن إحداثيات الفرد الإضافي (9) هي: (0.2704 1.0832)

5. نرغب في هذا الفرع إلى إعادة تشكيل قيم الجدول الأولي للبيانات R :

1.5. بالاستعانة بعبارات الانتقال برهن أن عبارة إعادة تشكيل الجدول X (جدول ممرکز ومرجج) هي: $X = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\alpha}}} F_{\alpha} G'_{\alpha}$

لدينا عبارتي الانتقال هما:

$$U_{\alpha} = X' V_{\alpha} / \sqrt{\lambda_{\alpha}} = G_{\alpha} / \sqrt{\lambda_{\alpha}} \wedge V_{\alpha} = X U_{\alpha} / \sqrt{\lambda_{\alpha}} = F_{\alpha} / \sqrt{\lambda_{\alpha}}$$

$$X = \sum_{\alpha=1}^3 \sqrt{\lambda_{\alpha}} V_{\alpha} U'_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\alpha}}} F_{\alpha} G'_{\alpha}$$

نعوض في X نجد أن:

2.5. إيجاد قيم الجدول X :

$$X = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\alpha}}} F_{\alpha} G'_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} F_1 G'_1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} F_2 G'_2$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{2.0678}} \begin{bmatrix} -0.6632 \\ 2.4028 \\ 1.3302 \\ -1.3302 \\ -2.4028 \\ 0.5370 \\ -0.5370 \\ 0.6632 \end{bmatrix} \otimes [-0.9725; 0.3683; 0.9932] + \frac{1}{\sqrt{0.9322}} \begin{bmatrix} 1.0237 \\ -0.2932 \\ 1.3773 \\ -1.3773 \\ 0.2932 \\ -0.8354 \\ 0.8355 \\ -1.0238 \end{bmatrix} \otimes [0.2328; 0.9297; -0.1167]$$

$$X = \begin{bmatrix} 0.4485 & -0.1698 & -0.6822 \\ -1.6250 & 0.6153 & 2.4716 \\ -0.8996 & 0.3406 & 1.3683 \\ 0.8996 & -0.3406 & -1.3683 \\ 1.6250 & -0.6153 & -2.4716 \\ -0.3632 & 0.1375 & 0.5523 \\ 0.3631 & -0.1375 & -0.5523 \\ -0.4485 & 0.1698 & 0.6822 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2469 & 0.9858 & -0.1238 \\ -0.0707 & -0.2823 & 0.0355 \\ 0.3321 & 1.3262 & -0.1665 \\ -0.3321 & -1.3262 & 0.1665 \\ 0.0707 & 0.2823 & -0.0354 \\ -0.2014 & -0.8044 & 0.1010 \\ 0.2015 & 0.8045 & -0.1010 \\ -0.2469 & -0.9858 & 0.1238 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6954 & 0.8159 & -0.8060 \\ -1.6957 & 0.3330 & 2.5070 \\ -0.5675 & 1.6668 & 1.2017 \\ 0.5675 & -1.6669 & -1.2017 \\ 1.6957 & -0.3330 & -2.5070 \\ -0.5646 & -0.6669 & 0.6534 \\ 0.5646 & 0.6670 & -0.6533 \\ -0.6954 & -0.8160 & 0.8060 \end{bmatrix}$$

3.5. استنتاج قيم الجدول R للمعطيات الأولية:

$$X = \left[x_{ij} = \frac{\eta_{ij} - \bar{\eta}_j}{s_j} \right] \Rightarrow R = [\eta_{ij} = s_j x_{ij} + \bar{\eta}_j]$$

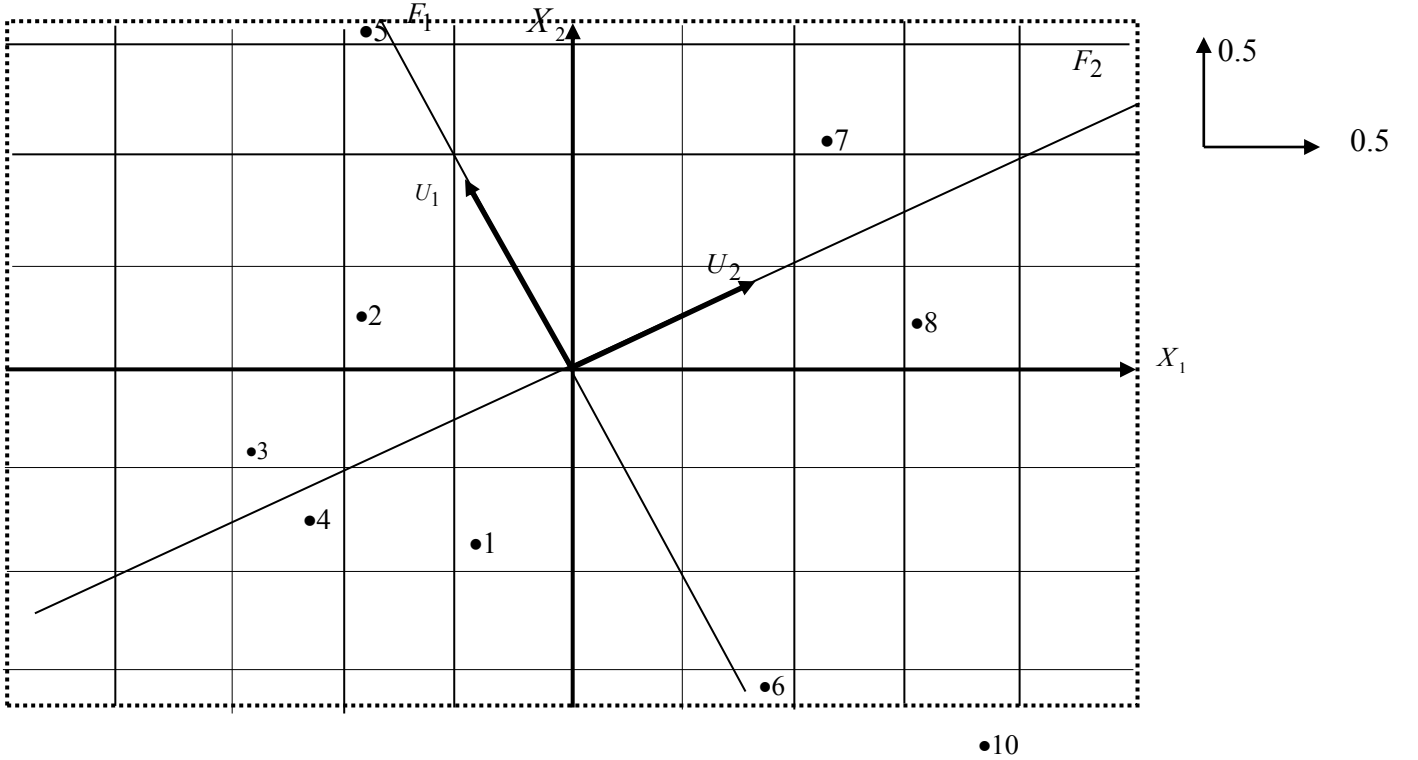
لدينا:

باستعمال المتوسطات و الانحرافات المعيارية للمتغيرات المذكورة في الجدول الأول مع قيم X نجد أن:

الأفراد / المتغير	الطول بالسنتيمتر	الوزن بالكيلو غرام	السعة الرئوية للتنفس باللتر
1	177.43	72.41	2.56
2	151.88	68.03	4.37
3	163.94	80.15	3.66
4	176.06	49.85	2.35
5	188.12	61.97	1.63
6	163.97	58.94	3.36
7	176.03	71.06	2.64
8	162.57	57.59	3.44

التمرين 04:

1. مثل بيانياً الأفراد من 1 إلى 10 في المعلم المتعامد و المتجانس $\bar{i} = 1.10$ $(X_1(i) \otimes X_2(i))$



2. لتكن المركبة الخطية التالية: $F_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ حيث أن: $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$.

1.2. إذا علمت أن F_1 ذات تباين أعظمي $V(F_1)$ Maximale ، حدد قيم F_1 بالنسبة للأفراد السابقين، ثم مثل هذه المركبة في المستوي السابق؛

$$\begin{cases} F_1 = XU_1 = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \\ U_1' U_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 \end{cases} \quad \text{بوضع: } X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix} \text{ و } U_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ نجد أن:}$$

و العبارة $U_1' U_1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$ تعني أن الشعاع U_1 شعاع وحدة.

$$V(F_1) = \frac{F_1' F_1}{n} = \frac{U_1' X' X U_1}{n} \quad \text{و يصبح لدينا تباين } F_1 \text{ هو:}$$

$$\begin{cases} \text{Max } V(F_1) = \frac{F_1' F_1}{n} = \frac{U_1' X' X U_1}{n} \\ S / c \\ U_1' U_1 = 1 \end{cases} \quad \text{و بالتالي يصبح المشكل المطروح هو:}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L(U_1)}{\partial U_1} = 0 \\ \frac{\partial L(U_1)}{\partial \lambda_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{X' X}{n} \right) U_1 = \lambda_1 U_1 \\ U_1' U_1 = 1 \end{cases} \quad \text{و يكون: } L(U_1, \lambda_1) = \frac{U_1' X' X U_1}{n} - \lambda_1 (U_1' U_1 - 1)$$

و على أساس أن البيانات $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix}$ ممركة فان المصفوفة $\left(\frac{X' X}{n} \right)$ تمثل مصفوفة التباين و التباين المشترك $V = \left(\frac{X' X}{n} \right)$.

من العبارة التي حصلنا عليها: $V U_1 = \lambda_1 U_1$ يمكننا القول أن U_1 يمثل شعاع ذاتي لمصفوفة التباين و التباين المشترك V و المرفق بالقيمة الذاتية λ_1 . غير أن المصفوفة المربعة V ذات البعد 2 تملك قيمتين ذاتيتين، فأني قيمة نأخذ؟

إذا رجعنا إلى المشكل الأصلي المطروح للحل نجد أن الهدف الأساسي هو تعظيم تباين F_1

$$V(F_1) = \frac{F_1' F_1}{n} = \frac{U_1' X' X U_1}{n} = \lambda_1 (U_1' U_1) = \lambda_1 \quad \text{لدينا:}$$

و منه فإننا نأخذ اكبر قيمة ذاتية لـ λ_1 ، وعليه فإننا نقوم أولاً بتحديد قيم مصفوفة التباين و التباين المشترك V :

$$V = \left(\frac{X' X}{n} \right) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} V(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) \\ \text{Cov}(X_1, X_2) & V(X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.27 & -0.36 \\ -0.36 & 1.81 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda \text{ valeur propre de } V) \Leftrightarrow |V - \lambda I_2| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1.27 - \lambda & -0.36 \\ -0.36 & 1.81 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1.99 \wedge \lambda_2 = 1.09 : V$$

نأخذ القيمة الذاتية $\lambda_1 = 1.99$ ثم نبحث عن الشعاع الذاتي $U_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ المرافق لها.

$$(U_1 \text{ vecteur propre associe a } \lambda_1 \text{ de } V) \Leftrightarrow (V - \lambda_1 I_2) U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -0.72 & -0.36 \\ -0.36 & -0.18 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{لدينا:}$$

$$\begin{cases} -0.72u_1 - 0.36u_2 = 0 \\ -0.36u_1 - 0.18u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -0.5u_2 \\ u_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5u_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U_1 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{يكون:}$$

و لدينا طول الشعاع U_1 هي: $\|U_1\| = \sqrt{(-0.5)^2 + 1^2} = 1.12 \neq 1$ و بالتالي يجب جعل U_1 شعاع وحدة:

$$U_1 = \begin{pmatrix} -0.5/1.12 \\ 1/1.12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.44 \\ 0.90 \end{pmatrix}_{\text{norme}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -0.44 \\ \alpha_2 = 0.90 \end{cases}$$

و بالتالي عبارة المركبة الخطية F_1 هي: $F_1 = -0.44X_1 + 0.90X_2$ و بتعويض قيم X_1, X_2 في F_1 نجد أن:

الأفراد	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1	-0.68	0.67	0.21	-0.24	1.79	-1.79	0.46	-0.43	2.47	-2.46

2.2. استنتج المتوسط الحسابي و تباين المركبة F_1 ؛

$$Var(F_1) = \lambda_1 = 1.99 \quad ; \quad \overline{F_1} = 0$$

3. لتكن المركبة الخطية التالية: $F_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$ حيث أن: $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$ و $F_2 \perp F_1$.

1.3. إذا علمت أن F_2 ذات تباين أعظمي $Maximale V(F_2)$ ، حدد قيم F_2 بالنسبة للأفراد السابقين، ثم مثل هذه المركبة في المستوي السابق؛

$$\left\{ \begin{array}{l} MaxV(F_2) = \frac{F_2' F_2}{n} = \frac{U_2' X' X U_2}{n} \\ S/c \\ U_2' U_2 = 1 \end{array} \right. \quad : \text{بنفس الطريقة السابقة يمكننا وضع: } X = (X_1 \ X_2) \text{ و } U_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \text{ نجد أن:}$$

و لحل هذا المشكل نستعمل دالة لاغرانج فنجد أن: $L(U_2) = \frac{U_2' X' X U_2}{n} - \lambda_2 (U_2' U_2 - 1)$ و يكون:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L(U_2)}{\partial U_2} = 0 \\ \frac{\partial L(U_2)}{\partial \lambda_2} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{X' X}{n} \right) U_2 = \lambda_2 U_2 \\ U_2' U_2 = 1 \end{array} \right.$$

من العبارة التي حصلنا عليها: $V U_2 = \lambda_2 U_2$ يمكننا القول أن U_2 يمثل شعاع ذاتي لمصفوفة التباين و التباين المشترك V و المرفق بالقيمة الذاتية λ_2 . و من خلال النتائج السابقة $\lambda_1 = 1.99$ يكون: $\lambda_1 + \lambda_2 = Trace(V) \Rightarrow \lambda_2 = 1.09$

لدينا:

$$\left(U_2 \text{ vecteur propre associe a } \lambda_2 \text{ de } V \right) \Leftrightarrow (V - \lambda_2 I_2) U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.18 & -0.36 \\ -0.36 & 0.72 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.18u_1 - 0.36u_2 = 0 \\ -0.36u_1 + 0.72u_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_2 = 0.5u_1 \\ u_1 \in \mathbb{R} \end{array} \right. \Rightarrow U_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0.5u_1 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \text{ يكون:}$$

و لدينا طويلة الشعاع U_2 هي: $\|U_2\| = \sqrt{(0.5)^2 + 1^2} = 1.12 \neq 1$ و بالتالي يجب جعل U_2 شعاع وحدة:

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1/1.12 \\ 0.5/1.12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.90 \\ 0.44 \end{pmatrix}_{norme} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0.90 \\ \beta_2 = 0.44 \end{cases}$$

و بالتالي عبارة المركبة الخطية F_2 هي: $F_2 = 0.90X_1 + 0.44X_2$ و بتعويض قيم X_1, X_2 في F_2 نجد أن:

الأفراد	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_2	-0.76	-0.77	-1.44	-1.43	-0.11	-0.07	1.47	1.48	0.78	0.83

2.3. استنتج المتوسط الحسابي و تباين المركبة F_2 ؛

$$Var(F_2) = \lambda_2 = 1.09 \quad ; \quad \overline{F_2} = 0$$

4. نفترض فيما يلي أن الأفراد: 6، 7، 8، 9 و 10 هم ذو جنس ذكر و البقية إناث، في المستوي السابق حدد المركبة التي يمكنها الفصل بين الجنسين؛ المركبة F_1