TD N°2 (ACP)

Exercice 01:

On considère le tableau de données X de type (3,2) suivant :

$$X = \begin{matrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 0 \end{matrix}$$

1. Donner le tableau des données centrées réduites.
2. Déterminer la matrice V des variances-covariances et la matrice R des corrélations.
3. Déterminer les valeurs propres λi de la matrice R.
4. Déterminer les vecteurs propres Fi associés aux valeurs propres λi.

Exercice 02 :

On considère le tableau de données X de type (3,2) suivant:

$$X = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{matrix}$$

1. Donner le tableau des données centrées.
2. Déterminer la matrice des variances covariances V.
3. Diagonaliser la matrice V. On note $\lambda 1$ et $\lambda 2$ ses valeurs propres avec $\lambda 1 > \lambda 2$.
4. Déterminer Fi les axes factoriels. Donner le vecteur unitaire ui de chaque axe Fi. Vérifier que ces axes sont perpendiculaires.
5. Ecrire la matrice diagonale des valeurs propres Λ et calculer sa trace $tr(\Lambda)$ et vérifier que $tr(\Lambda)=tr(V)$.
6. Supposons que nous prenons un seul axe
   a. Quelles sont les coordonnées de la composante principale ?
   b. Calculer les corrélations entre les variables initiales et la composante principale.
7. Donner le tableau des données normées (centrées et réduites).
8. Déterminer la matrice des corrélations Γ.
9. Diagonaliser la matrice Γ. On note $\lambda 1$ et $\lambda 2$ ses valeurs propres avec $\lambda 1 > \lambda 2$.
10. Déterminer Fi les axes factoriels. Donner le vecteur unitaire ui de chaque axe Fi. Vérifier que ces axes sont perpendiculaires.
11. Ecrire la matrice diagonale des valeurs propres Λ et calculer sa trace $tr(\Lambda)$ et vérifier que $tr(\Lambda)=tr(\Gamma)$.

Exercice 03 :

Soit le tableau des données suivant :

X	V^1	V^2	V^3
I_1	-5.5	-4.5	-3.5
I_2	-0.5	-1.5	-2.5
I_3	0.5	1.5	2.5
I_4	5.5	4.5	3.5

On distingue quatre individus I_1, I_2, I_3 et I_4. Chaque individu est caractérisé par trois variables quantitatives V^1, V^2 et V^3. Chaque individu est affecté du même poids.

1. Vérifier que les données sont centrées.
2. Compléter la matrice **V** (la matrice des variances covariance).

V	V^1	V^2	V^3
V^1	……..	…….	…….
V^2	…….	11,25	…….
V^3	10,25	9.75	…….

3. Soit $\boldsymbol{v_1}$ (resp. $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$) un vecteur propre de $\boldsymbol{V}$ associé à la valeur propre $\boldsymbol{\lambda_1}$ (resp. $\boldsymbol{\lambda_2}$, $\boldsymbol{\lambda_3}$) tq :

   ${}^t\boldsymbol{v_1} = (0.6370 \;\; -0.0655 \quad -0.7681)$, ${}^t\boldsymbol{v_2} = (0.6539 \;\; 0.5736 \;\; 0.4934)$, ${}^t\boldsymbol{v_3} = (\boldsymbol{\alpha} \;\; -0.8165 \quad \boldsymbol{\beta})$

   a. Déterminer les trois valeurs propres $\boldsymbol{\lambda_1}$**,** $\boldsymbol{\lambda_2}$ et $\boldsymbol{\lambda_3}$.

   b. Déterminer les cordonnées $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$.

4. Déterminer les axes principaux.
5. Calculer :
   a. L'inertie par rapport au centre de gravité $\boldsymbol{I_g}$.

   b. Pourcentage d'inertie expliquée par le premier axe.

   c. Pourcentage d'inertie par rapport au premier axe.

   d. Pourcentage d'inertie expliquée par le plan engendré par les deux premiers axes.
6. Quels sont les individus les mieux représentés ?
7. Calculer les corrélations entre les variables initiales et les composantes principales.