I. Chapitre 1 : Optimisation linéaire

1. Introduction :

L'optimisation dans le sens large du terme consiste à chercher la meilleure solution a un problème donné, le sens « meilleur solution » est définie par un objectif, le problème est défini sur un ensemble de solution possibles.

But : trouver la solution qui maximisent ou minimisent certains facteurs d'étude « cout, quantité, la marge bénéficiaire ».

Comment ?

- Modéliser le problème réel sous forme d'une fonction mathématique (appelée **fonction objectif**) ;
- Choix d'une méthode de résolution du problème modélisé ;
- Trouver les valeurs des paramètres qui maximisent ou minimisent cette fonction.

2. Exemples de programmes linéaires :

2.1. Exemple1/Problème de production :

Une entreprise fabrique deux produits **A** et **B** pour fabriquer **A** et **B** elle va utiliser une machine (**M**) cette machine ne peut pas tourner plus que **100 H** **(**La disponibilité de la machine **100 H**), Pour fabriquer le produit **A** il me faut **2H** de la machine **A**, Pour fabriquer le produit **B** il me faut **3H** de la machine **B.**

	A	B	La disponibilité de la machine M
M	2h	3h	100 h
Marge Bénéficière	140 da	180 da	

Le produit A dégager une marge de 140 da, Le produit B dégagé une marge de 180 da.

2.1.1 Modélisation du problème :

- Identification des variables de décision :

  x : le nombre de A

  y : le nombre de B

- La fonction objective : Max f = 140x +180y
- Les contraintes structurelles : 2x+3y < = 100
- Les contraintes de positivité : x > = 0 y > = 0

Alors le programme linéaire (**P.L**) peut s'écrire sous la forme mathématique suivante :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } f = 140x + 180y \\ 2x+3y <= 100 \\ x >= 0 \\ y >= 0 \end{array}}$$

2.1.2. Résolution du problème par la méthode du facteur rare :

	A	B	La disponibilité de la machine M
M	2h	3h	100 h
Marge Bénéficiaire	140 da	180 da	
Marge Bénéficiaire/heur	70da	60da	

y=0

2x+3y < = 100

2x < = 100

$$\boxed{x <= 50}$$

F= 140x+180y

y=0 f = 140*50=7000 da $\boxed{F = 7000da}$

2.2. Exemple 2 /Problème de production :

Une entreprise fabrique deux produits **A** et **B** pour fabriquer **A** et **B** elle va utiliser deux (02) machine (**M1 et M2**). La machine **M1** ne peut pas tourner plus que **70 H** (La disponibilité de la machine **70 H**), La machine **M2** ne peut pas tourner plus que **90 H** (La disponibilité de la machine **90 H**), Pour fabriquer le produit **A** il me faut **10 H** de la machine **A**, et **20 H** de la machine **B**, Pour fabriquer le produit **B** il me faut **10 H** de la machine **A,** et **10 H** de la machine **B**

.

	A	B	Disponibilité des machines
M1	10H	10H	70H
M2	20H	10H	90H
M.B	3000DA	2000DA	

1. Déterminer le domaine des contraintes ?
2. Déterminer la fonction économique à maximiser ?
3. Déterminer graphiquement le programme optimal ?

2.2.1. Modélisation du problème :

- Identification des variables de décision :

  x : le nombre de A

  y : le nombre de B
- La fonction objective : Max f = 3000 x +2000 y
- Les contraintes structurelles : 10 x+10 y < = 70

  20 x+10 y < =90
- Les contraintes de positivité : x > = 0 y > = 0

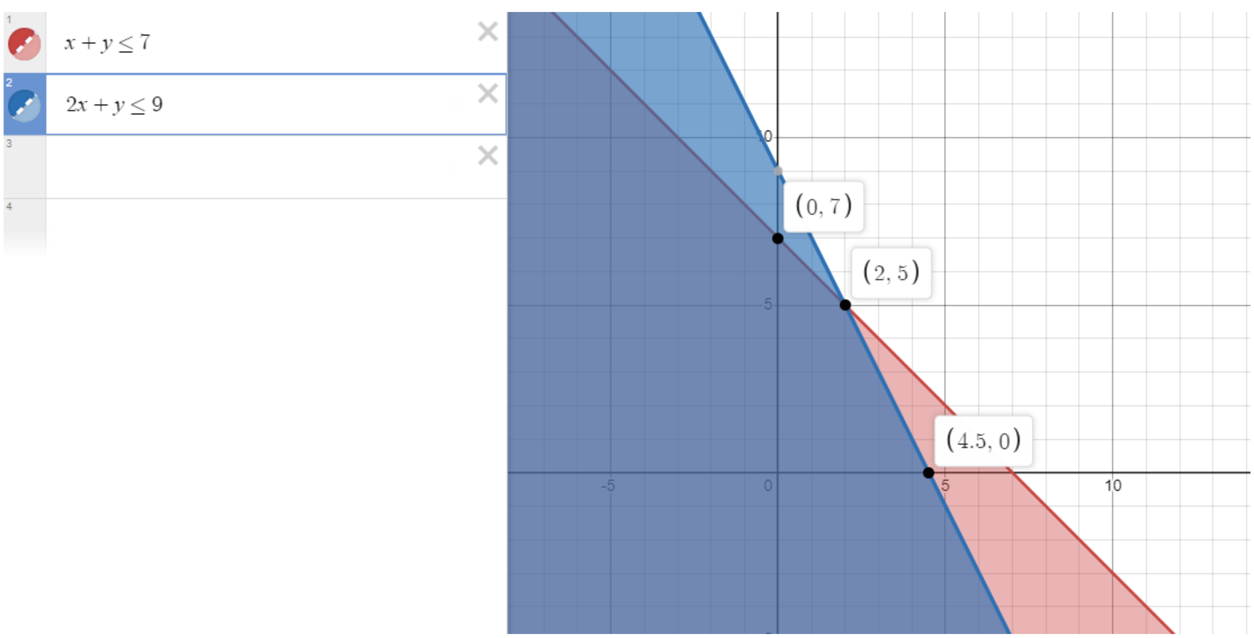
Alors le programme linéaire (**P.L**) peut s'écrire sous la forme mathématique suivante :

Max f = 3000 x +2000 y 10 x+10 y < = 70 20 x+10 y < = 90 x > = 0 y > = 0
Max f = 3000 x +2000 y x + y < = 7 2x+ y < = 9 x > = 0 y > = 0

2.2.3. Résolution du problème par la méthode de recensement des sommets (méthode graphique) :

D1 : x + y < = 7

D2 : 2 x + y < = 9



A (4.5, 0) …Fa = 3000*4.5+2000*0=12000 da

B (2, 5) …Fb= 3000*2+2000*5=16000 da

C (0,7) …Fc= 3000*0+2000*7=14000 da

O (0,0) …Fo= 0da

Fb > (Fa, Fc, Fo)

Résultat : Deux (02) produit de A et cinq produits de B.

2.3. Exemple3 /Problème de mélange :

Un agriculteur souhaite mélanger des engrais de façon à obtenir au **minimum**

15 unités de potasse

20 unités de nitrate

30 unités de phosphate

Il acheté deux (**02**) types d'engrais :

Le Type1 : procure	**Le Type2** : procure
03 unités de potasse **01** unité de nitrate **03** unités de phosphate Il coute **120** da.	**01** unité de potasse **05** unité de nitrate **02** unités de phosphate Il coute **60** da.

- Exprimer à l'aide d'un programme linéaire la combinaison d'engrais qui remplira les conditions exigées au moindre cout. ?

2.3.1. Modélisation du problème :

- Identification des variables de décision :

  x : la quantité de mélange type 01

  y: la quantité de mélange type 02

- La fonction objective : Mini f = 120 x+60 y

	Type01	Type02	Besoins
Potasse	3	1	15
Nitrate	1	5	20
Phosphate	3	2	30

- Les contraintes structurelles : $3x + y >= 15$

  $x + 5y >= 20$

  $3x + 2y >= 30$

- Les contraintes de positivité : $x >= 0 \quad y >= 0$

Alors le **P.L**

$$\begin{array}{|c|}\hline \text{Mini } f = 120x + 60y \\ 3x + y >= 15 \\ x + 5y >= 20 \\ 3x + 2y >= 30 \\ x >= 0 \\ y >= 0 \\ \hline\end{array}$$

2.4. Exemple 4 / problème de transport :

Une entreprise dispose trois usines localisées dans trois (03) villes différentes du pays.

La production annuelle de chaque usine est :

Usine	Production annuelle
U1	15000 unités
U2	12000 unités
U3	23000 unités

Ces trois usines alimentent quatre (04) points de vents dont la demande annuelle est :

Point de vente	Demande annuelle
A	10000 unités
B	5000 unités
C	20000 unités
D	15000 unités

Le cout de transport de chaque usine à chaque point de vente sont indiquées dans le tableau suivant :

	A	B	C	D
U1	5	6	6	8
U2	11	9	4	7
U3	12	7	8	5

- Formuler le modèle de programmation linéaire d'obtenir un plan de (**P.L**), transport a un cout minimal. ?

2.4.1. Modélisation du problème de Transport :

- Les variables de décision :

Xij : le nombre d'article a expédié de l'usine **i** vers le point de vente **j**

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}$$

$$X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}$$

$$X_{31}, X_{32}, X_{33}, X_{34}$$

- La fonction économique (fonction objective) :

$$\text{Minimiser } F = [5X_{11} + 6X_{12} + 6X_{13} + 8X_{14}] + [11X_{21} + 9X_{22} + 4X_{23} + 7X_{24}] + [12X_{31} + 7X_{32} + 8X_{33} + 5X_{34}].$$

Le cout de transport total a minimisé :

	A	B	C	D	Capacite de production
U1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	15000
U2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	12000
U3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	23000
Demande annuelle	10000	5000	20000	15000	

- Les contraintes structurelles :

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} <= 15000$ $X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} <= 12000$ $X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} <= 23000$	$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 10000$ $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 5000$ $X_{13} + X_{23} + X_{33} = 20000$ $X_{14} + X_{24} + X_{34} = 15000$

2.5. Exemple 5 / problème d'optimisation (cas : deux (02) variables) :

2.5.1. Résolution du problème par La méthode simplexe.

La forme canonique : (max , < =)	La forme standard : (max , =)
Max $z = 8x+2y$ $x - y <= 1$ $x + 2y <= 8$ $x + y <= 5$ $x >= 0 \quad y >= 0$	Max $z = 8x+2y$ $x - y + e_1 = 1$ $x + 2y + e_2 = 8$ $x + y + e_3 = 5$

T1 :

	x	y	e 1	e 2	e 3	B	
e 1	1	-1	1	0	0	1	1/1
e 2	1	2	0	1	0	8	8/1
e 3	1	1	0	0	1	5	5/1
Z	8	2	0	0	0	0	

T2 :

	x	y	e 1	e 2	e 3	B
x	1	-1	1	0	0	1
e 2	0	3	-1	1	0	7
e 3	0	2	-1	0	1	4
Z	0	10	-8	0	0	-8

T3:

	x	y	e 1	e 2	e 3	B
x	1	0	1/2	0	1/2	3
e 2	0	0	1/2	0	-3/2	1
y	0	2	-1/2	0	1/2	2
Z	0	0	-3	0	-5	-28

Résultat :

X=3
Y=2
Z =|-28 | = 28

2.6. Exemple 6 /Problème d'optimisation (cas : trois variables) :

2.6.1. Résolution du problème par La méthode simplexe :

La forme canonique	La forme standard
Max F =120 x + 108y + 75z x + y + z < = 12 x < = 5 8x + 7y + 5z < = 145 x > = 0 y > = 0 z > = 0	Max F =120 x + 108y + 75z x + y + z + **e** 1= 12 x + **e** 2= 5 8x + 7y + 5z + **e** 3 = 145

T1 :

	x	**y**	**z**	**e** 1	**e** 2	**e** 3	**B**	
e 1	1	1	1	1	0	0	12	12/1
e 2	1	0	0	0	1	0	5	5/1
e 3	8	7	5	0	0	1	145	145/8
F	120	108	75	0	0	0	0	

T2 :

	x	**y**	**z**	**e** 1	**e** 2	**e** 3	**B**	
e 1	0	1	1	1	-1	0	7	7/1
x	1	0	0	0	1	0	5	5/0
e 3	0	7	5	0	-8	1	105	105/7
F	0	108	75	0	-120	0	-600	

T3 :

	x	**y**	**z**	**e_1**	**e_2**	**e_3**	**B**
y	0	1	1	1	-1	0	7
x	1	0	0	0	1	0	5
e_3	0	0	-2	-7	-1	1	56
F	0	0	-33	-108	-12	0	-1356

Résultat :

X=5

Y=7

F =| - 1356| = 1356

2.7. Exemple 7 /problème de production : ''Usine de fabrication meubles''

	Table	Chaise	Temps libre
Menuiserie	1H	2H	20H
Assemblage	2H	1H	22H
Vernissage	1H	1H	12H
Profit	300 da	200 da	

Primal : →	Dual :		Primal : →	Dual :
Max $\leq$ $\leq$	**Min** $\geq$ $\geq$		**Min** $\geq$ $\geq$	**Max** $\leq$ $\leq$

2.7.1. Modélisation du problème de production :

- Les variables de décisions :

x : nombre des tables

y : nombre des chaises

<table>
<tr><th>Primal</th><th>La matrice de Transformation</th><th>Dual</th></tr>
<tr>
<td>$\text{Max } z = 300\,x_1 + 200\,x_2$
$x_1 + 2\,x_2 \leq 20$
$2\,x_1 + x_2 \leq 22$
$x_1 + x_2 \leq 12$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>B</td></tr>
<tr><td>y_1</td><td>1</td><td>2</td><td>20</td></tr>
<tr><td>y_2</td><td>2</td><td>1</td><td>22</td></tr>
<tr><td>y_3</td><td>1</td><td>1</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Z</td><td>300</td><td>200</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>$\text{Min } F = 20\,y_1 + 22\,y_2 + 12\,y_3$
$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 300$
$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 200$</td>
</tr>
</table>

y_1 : prix d’une heure de menuiserie

y_2 : prix d’une heure d’assemblage

y_3 : prix d’une heure de vernissage.

Le programme dual :
1. il constitue une autre vision du programme initial primal ; 2. le programme primal et son dual permettront de résoudre des problèmes de minimisation en terme de maximisation, ce qui est souvent plus facile, et de développer de nouveau algorithme qui se révéleront plus performants dans un grand nombre de situation.

2.7.<u>Exemple 7/Problème d’optimisation :</u>

2.7.1. <u>Résolution du problème par le programme dual</u>

Primal	La matrice de Transformation	Dual
$\text{Max } z = 15x_1 + 25x_2$ $x_1 + 3x_2 \leq 96$ $x_1 + x_2 \leq 40$ $7x_1 + 4x_2 \leq 238$ $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} & x_1 & x_2 & B \\ \hline y_1 & 1 & 3 & 96 \\ y_2 & 1 & 1 & 40 \\ y_3 & 7 & 4 & 238 \\ Z & 15 & 25 & \end{array}$	$\text{Min } F = 96y_1 + 40y_2 + 238y_3$ $y_1 + y_2 + 7y_3 \geq 15$ $3y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 25$ $y_1 \geq 0$ $y_2 \geq 0$ $y_3 \geq 0$
$x_1 = 12 \quad x_2 = 28$ $\max z = 880$		$y_1 = 5 \quad y_2 = 10 \quad y_3 = 0$ $\min F = 880$