Introduction au raisonnement non monotone

(raisonnement de sens commun ; raisonnement avec information par défaut)

Les logiques classiques sont monotones

- Une logique est monotone si et seulement si : Etant donnés deux ensembles de prémisses P et P', si P est inclus dans P' alors l'ensemble des théorèmes démontrables à partir de P est inclus dans l'ensemble des théorèmes démontrables à partir de P'.

Autrement dit :

- Si pour toute formule qui est un théorème dans une théorie formelle, cette formule reste un théorème si la théorie originale est augmentée en y ajoutant des axiomes.

Les propriétés de l'inférence classique sont :

- La réflexivité : $\{A1, ..., An, B\} \models B$

- La monotonie : si $\{A1, ..., An\} \models B$

  alors $\{A1, ..., An, C\} \models B$

- La transitivité : si $\{A1, ..., An\} \models C$

  et $\{A1, ..., An, C\} \models B$

  alors $\{A1, ..., An\} \models B$

Le raisonnement révisable : perte de la monotonie

Définition 1

On appelle ***raisonnement non monotone*** tout raisonnement qui permet de tirer des conclusions qui pourront être **invalidées** à la lumière de nouvelles informations.

Autrement dit : si une formule est un théorème dans une théorie formelle, elle ne reste pas nécessairement un théorème lorsque cette théorie est augmentée:

Nos croyances précédentes peuvent changer.

Exemple

Adem est jeune;   Adem est étudiant

si Adem est jeune et si il est étudiant alors

Adem ne travaille pas

conclusion **Adem ne travaille pas**

✓ J'apprends que Adem travaille

nouvelle conclusion **Adem travaille**

Définition2

On appelle ***inférence non monotone*** le schéma suivant :

Etant donnée A, en l'absence d'évidence de B,

conclure C.

intuitivement (A est en faveur de C et l'absence de B en assure la rationalité)

En particulier : Etant donnée A, en l'absence d'évidence du contraire, déduire C.

3 questions sont alors à étudier :

- Comment construire des systèmes formels non monotones ? (c.a.d comment représenter les règles non monotones dans un système formel ?)
- Y a t-il d'autres moyen pour simuler un raisonnement non monotone ?
- Comment revenir sur une conclusion déjà produite parce qu'une nouvelle information doit être prise en compte (c'est le problème de la révision des croyances)

II. Système Formels et raisonnement non monotone

Il s'agit de donner un sens au raisonnement révisable.

Plus précisément, si S est un ensemble d'axiomes et th(S) la théorie qu'il engendre, la non monotonie est exprimée comme suit :

Si $S \subseteq T$ alors $th(S) \subseteq th(T)$ est remise en cause, ce qui signifie qu'ajouter un axiome n'élargit plus nécessairement la théorie engendrée.

bien que S reste consistante.

Exemple

si S ={ami (Ali, Ossama), ami (Oussama, Riad)},

la règle ami(x, y) ∧ ami(y, z) et on croit que ami(x, z) alors ami(x, z),

ceci va prouver ami(Ali, Riad),

le fait de rajouter ¬ami(Ali, Riad) dans S ne le permettra plus, bien que S reste consistante

En 1983, Moore a produit une typologie des raisonnements non monotones basée sur l'observation qu'on doit faire une distinction entre :

L'information incomplète

Représentation incomplète d'une information complète.

Nous distinguons dans le raisonnement non monotone :

La supposition du monde ferme : Dans les domaines du monde réel, les théories sont typiquement très touffues, et le plus souvent incomplètes.

Exemple:

Si vous voulez savoir si Ali travaille dans votre compagnie mais que vous ne pouvez pas trouver son dossier. C'est vrai que employee(Ali) n'est pas dans votre base de données, mais comme ¬employee(Ali) n'y est pas non plus, vous ne pouvez rien prouver.

➔ Solution: On peut compléter la théorie en ajoutant la négation de toutes les formules atomiques sur terre (grounded) qui ne sont pas des théorèmes.

- **Le raisonnement par défaut :**

La logique des défauts Introduite par Reiter [Reiter 80] pour formaliser le raisonnement simplement consistant, tel que une information incomplète, conclusions conjecturales simplement plausibles (lois correctes dans la plupart des cas, mais admettant des exceptions).

➢ Inférer une conclusion par défaut en l'absence de son opposé peut conduire à un raisonnement révisable c.a.d être capable de rétracter cette conclusion si celle-ci mène à l'inconsistance lors de l'insertion d'une nouvelle information

Exemple

Le Problème avec le raisonnement par défaut est introduit par l'exemple suivant :

1. Ingénieur (x)
2. C(praticien (x)) (R1)

Alors 3. Praticien (x)

C représente le pseudo-predicat “Consistent” (Pseudo car on ne peut pas prouver des théorèmes de la forme C(a)

Ajoutons

1. Scientifique(x)
2. C(Théoricien(x)) (R2)

Alors 3. Théoricien (x),

Ainsi que la croyance: $\forall x$ théoricien(x) $\Leftrightarrow \neg$Praticien (x)

Et, si Rami est ingénieur et scientifique ➔ Problème!

Si on applique R1 en premier, on conclura que Rami est praticien mais pas théoricien.

Si on applique R2 en premier, on tirera la conclusion opposée ➔

L'ordre a de l'importance (ce qui ne devrait pas arriver en logique non-monotone)

La classification de Moore permet de faires sortir deux grandes classes des raisonnements non monotones :

- Le raisonnement par défaut basé sur la déduction des conclusions sur des faits vrais en général.
- Le raisonnement auto_épistémique basé sur la déduction d'une conclusion C en raisonnant comme suit : Si C était faux, je le saurais d'une manière ou d'une autre c.a.d. je l'aurais démontré, vérifié, appris.....

Ce n'est pas le cas donc C est une conclusion valide.

III. La logique des défauts

Dans la logique des défauts [Rei80] , il s'agit essentiellement de la logique classique à laquelle on ajoute des *règles des défauts* de la forme suivante : $\frac{\alpha : \beta 1, \ldots, \beta n}{\gamma}$.

$$\frac{\alpha \; : \beta_1, \ldots, \beta_n}{\gamma}$$

Où α est le pré-requis du défaut, cette partie peut être vide

Les β_i constituent sa justification

γ est le conséquent ou la conclusion du défaut

Remarque : **α, βi et** γ sont des formules logiques Intuitivement, une telle règle signifie :

- "si α est vrai et $\beta 1, \ldots, \beta n$ sont cohérentes avec ce qui est connu, alors γ peut être conclue".

Ou bien

« Si **α** est cru et si les **βi** sont consistants avec tout ce qui est cru, alors $\boldsymbol{\gamma}$ peut être cru également.

Explication

Le système à résoudre contient :

- des formules logiques de la logique d'ordre 0 ou bien d'ordre 1 qui sont considérées vrai et qu'on peut aussi écrire sous forme de faits et de règles de production classiques
- un ensemble de règles de défaut c'est-à-dire des connaissances qu'on croit vrai mais avec certaines conditions chaque règle de défaut a la syntaxe suivante:

$$di = \frac{\alpha : \beta_1, \ldots, \beta_n}{\gamma}$$

Intuitivement, une telle règle signifie :

"si α est vrai et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont cohérentes avec ce qui est connu, alors γ peut être conclue".

Ou bien « Si α est cru et si les β_i sont consistants avec tout ce qui est cru, alors γ peut être cru également.

α est une connaissance du système qui est vrai

Les $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont les croyances qui ne doivent pas contredire α c'est la condition nécessaire pour pouvoir appliquer le défaut di

Exemple :

$\frac{A : B}{B}$; et $\frac{B : C}{C}$; sont deux défauts correctes par contre

$\frac{B, C : \neg C}{\neg C}$ n'est pas correcte

L'application d'un défaut consiste à insérer la conclusion dans la base de faits

Définition d'une théorie

W est un ensemble de formules de la logique classique et D un ensemble de règles des défauts. Alors, (W,D) est appelée une théorie des défauts.

Exemple

Soit la théorie (W, D) suivante :

W= { oiseau (O) ; canard (D) ; pingouin(G) ;

pingouin (x) $\longrightarrow$ oiseau(x) ;

pingouin(x)$\longrightarrow$ nage (x) ;

nage (x) $\longrightarrow$ $\neg$ vole (x) ;

canard(x) $\longrightarrow$ nage (x) $\wedge$ vole (x)

canard (x) $\longrightarrow$ oiseau (x) }

D = {

$$d1= \frac{oiseau\ (x) : vole(x)}{vole(x)} \quad \}$$

Extensions de (W,D)

On appelle extension d'une théorie de défauts l'ensemble de toutes conclusions qui peuvent être déduites des axiomes(***W)*** par **inférence classique et/ou par les règles de défaut de D**.

Plusieurs "extensions" peuvent être obtenues à partir d'une théorie

Une théorie peut ne pas avoir d'extensions

Remarques importantes

- des conséquents de défauts contradictoires ne peuvent appartenir à une même extension.
- Les ensembles maximaux consistants de formules inférées de la théorie W (clos déductivement

Explication

Pour obtenir une extension on procède comme suit :

- Une extension Ei contient initialement la connaissance W
- ensuite on ajoute d'abord tous les faits qui peuvent être inférés par les règles de production de W.
- on ajoute, uniquement, les conclusions des défauts di qu'on peut appliquer.

Dans quel cas on peut avoir plusieurs extensions ?

Exemple dans le cas où la théorie contient plusieurs défauts et l'ordre d'application des défauts influe sur le contenu de l'extension

Exemple

On considère la théorie (W,D) tel que W= {A , E, A → G}

et les règles de défaut

D : {d1= $\frac{A : B}{B}$; d2= $\frac{B : C}{C}$; d3 = $\frac{B : \neg C}{\neg C}$ }

Théorie de défauts normale

On dit que Δ est une extension de (W, D) ssi $\Delta = G(\Delta)$.

Δ est un ensemble de formules. Alors, $\vdash(\Delta)$ dénote la fermeture classique de Δ et $G(\Delta)$ le plus petit ensemble de formules tel que :

– $W \subseteq G(\Delta)$,

– si $\frac{\alpha:\beta}{\gamma}$. $\in D$, $\alpha \in G(\Delta)$ et $\neg\beta \notin G(\Delta)$, alors $\gamma \in G(\Delta)$.

- Toute extension représente une façon plausible de tirer des conclusions à partir de W et des règles des défauts de D.

- Une classe particulière de théories des défauts pour laquelle il y a toujours au moins une extension est celle représentée par des règles de défaut singulières et normales.

- Une règle des défauts singulière $\frac{\alpha:\beta}{\gamma}$. est dite *normale* ssi β est équivalent à γ.

- Une théorie des défauts est dite normale ssi elle ne contient que des règles normales, auquel cas elle possède au moins une extension.

Théorie de défauts semi normale

Reiter et Criscuolo ont étudié des théories des défauts *semi-normales*. Une règle singulière est dite *semi-normale* ssi β implique γ.

Une théorie des défauts est dite semi-normale ssi elle contient seulement des règles semi-normales. De telles théories sont intéressantes car elles permettent d'éviter certains aspects contre-intuitifs de la *transitivité*.

Exemple de théorie de défauts

"Dans une investigation criminelle, tout individu x présent sur une scène de crime est suspecté à moins que certains éléments contredisent la culpabilité de x. Si des éléments supplémentaires font qu'une telle contradiction se produit, alors x ne doit plus être suspecté."

La notion de « règle de défaut » permet de donner des conclusions dans les cas où, l'information n'étant peut être pas complète, on se réfère aux connaissances générales dans la situation telle qu'elle est connue.

$$\Gamma = (D, W) = \left(\left\{ \frac{\text{avoue : coupable}}{\text{Coupable}} ; \quad \frac{\text{alibi : } \neg\text{coupable}}{\neg\text{coupable}} \right\} \ \{ \text{avoue; alibi} \} \right)$$

Deux extensions sont possibles

E1 = { avoue; alibi; coupable}

E2 ={avoue; alibi; ¬coupable}

Exercice

Soit la théorie (W, D) suivante :

W= { Verte (banane) $\wedge$ Rouge (pomme) ; Rouge(x) $\rightarrow$ Mûr(x) ; Jaune (x) $\rightarrow$ Mûr(x) ; Jaune (abricot)} et D = {d1,d2,d3 } avec

d1 $\left\{ \dfrac{\phi : \neg \text{Jaune(banane)}\}}{\neg \text{Jaune(banane)}} \right.$

d2 : en général, une pomme mûre, on croit que si elle n'est pas jaune alors elle est rouge

d3: Un abricot mûr, est en général rouge

Questions

Modéliser les défauts d2 et d3

La théorie (W, D) a-t-elle 0, une ou plusieurs extensions

Modélisation les défauts d2 et d3

d2 : en général, une pomme mûre , on croit que si elle n'est pas jaune alors elle est rouge
on l'écrit :

$$d2= \frac{\text{mûr(pomme)} : \neg \text{Jaune(pomme)}}{\text{Rouge (pomme)}}$$

d3: Un abricot mûr, est en général rouge
on l'écrit :

$$d3= \frac{\text{mûr(abricot)} : \text{Rouge (abricot)}}{\text{Rouge (abricot)}}$$

Les extensions

W= { Verte (banane) ∧ Rouge (pomme) ; Rouge(x) → Mûr(x) ; Jaune (x) → Mûr(x) ;
Jaune (abricot)}

Première extension w1 :

En appliquant le raisonnement de la logique classique (application des deux règles de productions)

w1={ Verte (banane) ∧ Rouge (pomme) ; Rouge(x) → Mûr(x) ; Jaune (x) → Mûr(x) ; Jaune (abricot) ; verte (banane) ; rouge (pomme) ; mûr(pomme) ; mûr (abricot) }

Sémantiquement le défaut d1 est applicable puisque verte(banane) w1 alors

Elle n’est pas contradictoire avec ¬ Jaune(banane) et d1 est appliqué

w1={ Verte (banane) ∧ Rouge (pomme) ; Rouge(x) → Mûr(x) ; Jaune (x) → Mûr(x) ; Jaune (abricot) ; verte (banane) ; rouge (pomme) ; mûr(pomme) ; mûr (abricot),

¬ Jaune(banane) }

d2 est applicable puisque mûr(pomme) et jaune(pomme) w1

w1={ Verte (banane) ∧ Rouge (pomme) ; Rouge(x) → Mûr(x) ; Jaune (x) → Mûr(x) ; Jaune (abricot) ; verte (banane) ; rouge (pomme) ; mûr(pomme) ; mûr (abricot),

¬ Jaune(banane) ; Rouge (pomme) }

Remarque : Rouge (pomme) appartient déjà à w1 donc d2 ne modifie pas w1

Pour d3 : il n’est pas applicable car, malgré que mûr(abricot) appartient à w1 on a aussi jaune(abricot) qui appartient à w1 ce qui ne nous permet pas de croire que l’abricot est rouge c'est-à-dire contradiction avec rouge (abricot) donc on ne peut pas appliquer le défaut d3

Ici dans cet exemple l’ordre d’application des défauts n’est pas important puisque chaque défaut traite un fruit particulier ; Alors cette théorie possède une seule extension w1