Chapitre 1 : Espaces vectoriels et Applications linéaires

1-/ Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

1-1/ Espaces vectoriels

1-1-1/ Définition 1 : On appelle espace vectoriel sur un corps commutatif K un ensemble non vide E muni :

- d'une loi interne (additive), notée (+)

$$\begin{aligned} ExE &\longrightarrow E \\ (x,y) &\longrightarrow x+y \end{aligned}$$

et

- d'une loi externe (multiplicative), notée (.)

$$\begin{aligned} KxE &\longrightarrow E \\ (\alpha,x) &\longrightarrow \alpha.x \end{aligned}$$

telles que :

* $(E,+)$ est un groupe commutatif :

$$\begin{aligned} &(i)\ \forall x,y,z \in E\ x+(y+z)=(x+y)+z=x+y+z \\ &(ii)\ \exists 0_E \in E,\ \forall x \in E : 0_E + x = x + 0_E = x \\ &(iii)\ \forall x \in E,\ \exists -x \in E : x+(-x)=(-x)+x=0_E \\ &(iv)\ \forall x,y \in E : x+y=y+x \end{aligned}$$

* $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall (\alpha,\beta) \in K^2$:

$$\begin{aligned} &(i)\ \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \\ &(ii)\ (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \\ &(iii)\ (\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)=\alpha\beta x \\ &(iv)\ 1_K\, x = x \end{aligned}$$

Remarque :

(1) Les éléments de K (R ou C) sont appelés les scalaires, ceux de E sont appelés les vecteurs.

(2) On note l'espace vectoriel E sur un corps commutatif K par : $E = K-ev$.

Exemples :

(1) Soit $E = R^n$. On muni R^n de deux lois :

$$(x_1,x_2,..........,x_n)+(y_1,y_2,...........,y_n)=(x_1+y_1,.............,x_n+y_n)$$

$$\alpha(x_1,.............,x_n)=(\alpha x_1,...............,\alpha x_n)$$

On a $R^n = R-ev$

(2) L'ensemble $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K est un $K-ev$

1-1-2/ Proposition 1 : Soient $E = K - ev$ et $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in K$. Alors on a :

(1) $0_K.x = 0_E$ et $\alpha.0_E = 0_E$

(2) $\alpha.x = 0_E \Rightarrow \alpha = 0_K$ ou $x = 0_E$

(3) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$ et $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$

(4) $\alpha(-x) = -\alpha x$ et $(-1_K)x = -x$

N-B : Pour la suite, on notera 0 les éléments 0_E et 0_K s'il n'y a pas de confusion à craindre.

1-2/ Sous –espaces vectoriels

1-2 -1/ Définition 2 : Soient $E = K - ev$ et F une partie de E. On dit que F est un sous espace vectoriel de E ($F = sev - E$) si :

(1) $F \neq \varnothing$

(2) $\forall x, y \in F : x + y \in F$ (On dit que F est stable par la loi interne +)

(3) $\forall \alpha \in K, \forall x \in E : \alpha x \in E$ (On dit que F sert stable par la loi externe.).

1-2-2/ Proposition 2 : (Caractérisation)

Soit $E = K - ev$ et $F \subset E$ alors :

$F = sev - E$ ssi ($F \neq \varnothing$) et ($\forall x, y \in F, \forall \alpha, \beta \in K : \alpha x + \beta y \in F$)

N-B : Un sous espace vectoriel F contient toujours le vecteur nul ($0_E \in F$).

*Exemple :*Soit $E = R^2 = R - ev$, on note :

$F_1 = \{0\} x R$ et $F_2 = R x \{0\}$. F_1 et F_2 sont deux sous espaces vectoriels de E .

1-2-3/Proposition 3 : Soients $E = K - ev$ et $\{F_1, ..., F_n\}$ une famille de sev de E alors $(F_1 \cap F_2 \cap .... \cap F_n)$ est un sev de E .

N-B : La réunion de deux sev n'est pas en général un sev de l'espace vectoriel E .

Exemple : Soients F et G deux sev de R^2 définis par :

$F = \{(x, y) \in R^2 / x + y = 0\}$, $\qquad G = \{(x, y) \in R^2 / 2x + y = 0\}$.

On a $(1,-1) \in F$ et $(1,-2) \in G$ mais $(1,-1) + (1,-2) = (2,-3) \notin F \cup G$ donc $(F \cup G)$ n'est pas un sev de R^2 .

1-2-4/ Somme et somme directe :

a-) Définition 3 : Soients F_1 et F_2 deux sev d'un $K - ev$ E . On note $F_1 + F_2$ l'ensemble :

$$\{u_1 + u_2 / u_1 \in F_1 \; et \; u_2 \in F_2\}$$

$F_1 + F_2$ est appelé la somme de F_1 et F_2 et c'est un sev de E .

b-) Propriétés : Soients F_1, F_2, F_3 des sev d'un espace vectoriel E .

(1) $F_1 + F_2 = F_2 + F_1$

(2) $F_1 \subset F_1 + F_2$

(3) $F_1 + \{0\} = F_1$

(4) $F_1 + E = E$

(5) $(F_1+F_2)+F_3=F_1+(F_2+F_3)$

c-) Définition 4 : Deux sev F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E sont dits supplémentaires dans E ssi : $E=F_1+F_2$ et $F_1\cap F_2=\{0\}$.

On écrit alors $E=F_1\oplus F_2$ et on dit que E est la somme directe de F_1 et F_2.

Exemple : Soit $R^2=R-ev$, on considère $F_1=Rx\{0\}$ et $F_2=\{0\}xR$.

On a $E=F_1\oplus F_2$ car : $\forall(x,y)\in E\ (x,y)=(x,0)+(0,y)\in F_1+F_2\Rightarrow E\subset F_1+F_2$

et puisqu'on a déjà $F_1+F_2\subset E\Rightarrow$ $E=F_1+F_2$

D'autre part si $(x,y)\in F_1\cap F_2\Rightarrow y=0$ puisque $(x,y)\in F_1$ et $x=0$ puisque $(x,y)\in F_2$ $\Rightarrow(x,y)=(0,0)$, donc $F_1\cap F_2=\{0\}$.

On a donc F_1 et F_2 sont des sev supplémentaires.

*d-) Théorème :*Soient F_1 et F_2 deux sev d'un espace vectoriel E. Alors E est somme directe de F_1 et F_2 ssi tout élément de E se décompose d'une façon unique en somme d'un élément de F_1 et d »un élément de F_2.

C'est-à-dire : $E=F_1\oplus F_2\Leftrightarrow$ $\forall u\in E,\exists(u_1,u_2)\in F_1xF_2$ tel que : $u=u_1+u_2$ avec (u_1,u_2) unique.

N-B : Un sev F de E peut avoir plusieurs supplémentaires dans E.

1-3/ Famille génératrice, famille libre et base

1-3-1/ Famille génératrice :

a-) Définition 5 : Une famille de vecteurs $\{v_1,v_2,.........,v_n\}$ d'un espace vectoriel E ($E=K-ev$) est dite génératrice si : $\forall x\in E,\exists\,\lambda_1,\lambda_2,........,\lambda_n\in K$ tel que $x=\lambda_1v_1+...........+\lambda_nv_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iv_i$

*N-B :*On dit que tout $x\in E$ est une combinaison linéaire des vecteurs v_i.

Exemples :

(1) $R_n[X]=\{P\in R[X]/\deg(P)\leq n\}$. $P(X)=a_0+a_1X+..........+a_nX^n$ avec $a_0,a_1,......,a_n\in R$.

La famille $\{1,X,X^2,..........,X^n\}$ est une famille génératrice.

(2) Dans R^n, on considère la famille $\{(1,0,.......,0),...............,(0,........0,1)\}$ est une famille génératrice.

*b-) Définition 6 :*Un espace vectoriel est dit de dimension finie, s'il existe une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie.

Exemple :

*) R^n et $R_n[X]$ sont de dimension finie.

*) $R[X]$ est de dimension infinie.

Remarque : L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1,v_2,.........,v_n$ noté $<v_1,.........,v_n>$ est un sev de E de dimension finie.

1-3-2/ Famille libre et famille liée :

a-) Famille libre :

a-1) Définition 7 : Soit $\{v_1,...........,v_n\}$ une famille finie d'éléments d'un espace vectoriel E. On idit qu'elle est libre si : $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0_K$

On dit aussi que les vecteurs $v_1,............v_n$ sont linéairement indépendants.

Remarque : On dit que $\{v_1,...........,v_n\}$ est une famille liée s'il existe des λ_i non tous nuls, tels que l'on ait $\lambda_1 v_1 + ...\lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E$

Exemple : Dans R^3 les vecteurs $v_1 = (1,2,1), \quad v_2 = (-1,3,1)$ et $v_3 = (-1,13,5)$ sont liés car :

$$2v_1 + 3v_2 - v_3 = 0_{R^3}$$

a-2) Théorème : Une famille $\{v_1,...........,v_n\}$ est liée ssi l'un au moins des vecteurs v_i s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Démonstration

(1) $\Rightarrow$

$\exists\, \lambda_1,........,\lambda_n$ non tous nuls tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E$

Si $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow v_i = \dfrac{-\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \dfrac{-\lambda_2}{\lambda_i} v_2 + ... + \dfrac{-\lambda_n}{\lambda_i} v_n$

(2) $\Leftarrow$

$\exists\, v_i$ tel que : $v_i = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} .... + \alpha_n v_n \Rightarrow \alpha_1 v_1 + ... - v_i + ... + \alpha_n v_n = 0_E$

a-3) Théorème : Soi $\{v_1,...........,v_n\}$ une famille libre et x un vecteur quelconque de l'espace engendré par les v_i alors la décomposition de x sur les v_i est unique.

Preuve

$x = \alpha_1 v_1 \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 .... + \lambda_n v_n \Rightarrow (\alpha_1 - \lambda_1) v_1 + ... + (\alpha_n - \lambda_n) v_n = 0_E \Rightarrow$

$$\lambda_i = \alpha_i \quad \forall\, i = 1,2,......,n$$

1-3-3/ Base :

a-) Définition 8 : On appelle base d'un espace vectoriel, une famille à la fois libre et génératrice.

b-) Théorème : Soit $\{v_1,...........,v_n\}$ une base de E $(E = K - ev)$. Tout $x \in E$ se décompose d'une façon unique sur les v_i.

C'est-à-dire : $\forall x \in E, \exists (\lambda_1,.......,\lambda_n) \in K^n\, unique : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$

c-) Propriétés :

(1) $\{x\}$ est une famille libre $\Leftrightarrow \quad x \neq 0_E$

(2) Toute famille contenant une famille génératrice est une famille génératrice.

(3) Toute sous famille d'une famille libre est libre.

(4) Toute famille contenant une famille liée est liée.

(5) Toute famille $\{v_1,............,v_n\}$ dont l'un des vecteurs $v_i = 0_E$ est liée.

d-) Existence de bases (en dimension finie) :

*d-1) Théorème ;*Dans un espace vectoriel $E \neq \{0_E\}$ de dimension finie, il existe toujours des bases.

*d-2) Théorème :*Soit $E \neq \{0_E\}$ un $K-ev$ de dimension finie alors :

(1) de toute famille génératrice, on peut extraire une base.

(2) toute famille libre peut être complétée de manière à former une base.

1-3-4/Les théorèmes fondamentaux sur la dimension :

Dans un espace vectoriel E ($E = K-ev$) de dimension finie, toutes les bases ont même nombre d'éléments, ce nombre est appelé dimension de E sur K et est noté $\dim_K E$ ou $\dim E$.

*Remarque :*Soit $E = K-ev$ tel que $\dim E = n$

Toute famille de plus de n éléments est liée et une famille de moins de n éléments ne peut être génératrice.

Exemples :

(1) si $E = \{0_E\} \Rightarrow \dim E = 0$

(2) $\dim R^n = n$

(3) $\dim R_n[X] = n+1$

(*) Théorème : Soit $E = K-ev$ de dimension finie n, alors :

(1) Toute famille génératrice de n éléments est une base.

(2) Toute famille libre de n éléments est une base.

Remarque :

(1) Soient $E_1, E_2, ..., E_p$ des ev e dimension finie sur K alors :

$$\dim_K (E_1 \times E_2 \times .... \times E_p) = \dim_K E_1 + \dim_K E_2 + ...\dim_K E_p$$

(2)Soient $E = K-ev$ de dimension finie et $F = sev-E$ alors :

*) $\dim_K F \leq \dim_K E$

*) $\dim_K F = \dim_K E \Leftrightarrow E = F$

1-4/ Applications linéaires

1-4-1/ Définition 9 : Soient E et E' deux espaces vectoriels sur le même K et f une application de E dans E'. On dit que f est une application linéaire si :

(1) $f(u+v) = f(u) + f(v), \quad \forall u, v \in E$

(2) $f(\lambda\, v) = \lambda\, f(v), \quad \forall v \in E, \forall \lambda \in K$

N-B : - l'ensemble des applications linéaires de E dans E' est noté $L(E,E')$.

- Une application linéaire $f : E \longrightarrow E$ est appelée endomorphisme.

- $f(0_E) = 0_{E'}$ (car homomorphisme de groupes).

Exemples :

(1) $\begin{array}{l} Id_E : E \longrightarrow E \\ v \longrightarrow v \end{array}$ Id_E est linéaire dite application identité de E.

(2) $\begin{array}{l} D : R[X] \longrightarrow R[X] \\ P \longrightarrow D(P) = P' \end{array}$ D est linéaire dite dérivation d'un polynôme.

(3) Soit $v_0 \neq 0_E$ $(v_0 \in E)$. On définit l'application

$\begin{array}{l} g : E \longrightarrow E \\ v \longrightarrow v + v_0 \end{array}$ g n'est pas linéaire car $g(0_E) = v_0 \neq 0_E$.

1-4-2/ Image et noyau :

a-) Image d »une application linéaire : Soit $\begin{array}{l} f : E \longrightarrow E' \\ x \longrightarrow y = f(x) \end{array}$ une application linéaire.

$f(E)$ est un sous espace vectoriel de E', appelé image de f est noté $\operatorname{Im} f$.

$\operatorname{Im} f = \{ f(x) \in E' / \exists x \in E : y = f(x) \}$

Remarque : On a par définition de l'image directe $f(E)$:

f est surjective ssi $\operatorname{Im} f = E'$

b-) Noyau d'une application linéaire : Soit $\begin{array}{l} f : E \longrightarrow E' \\ x \longrightarrow y = f(x) \end{array}$ une application linéaire.

Le noyau de f noté $Kerf$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image est $0_{E'}$.

$Kerf = \{ x \in E / f(x) = 0_{E'} \}$

N-B :

(*) Le noyau est l'image réciproque du vecteur nul de l'espace d'arrivée : $Kerf = f^{-1}(0_{E'})$.

(*) $Kerf$ est un sev de E.

Exemple : $\begin{array}{l} f : R^3 \longrightarrow R^2 \\ (x, y, z) \longrightarrow f(x, y, z) = (-2x, y + 3z) \end{array}$

Calculer $Kerf$ et $\operatorname{Im} f$.

Ker(f)= ?

On a $Kerf = \{ (x, y, z) \in R^3 / f(x, y, z) = (0,0) \}$

$$f(x, y, z) = (0,0) \Leftrightarrow (-2x, y + 3z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3z \\ z \in R \end{cases}$$

Donc $Kerf = \{ (0, -3z, z) / z \in R \}$.

Im(f)= ?

$\operatorname{Im} f = \{ f(x, y, z) \in R^2 / \exists (x, y, z) \in R^3 : f(x, y, z) = (x', y') \}$.

Fixons $(x',y')\in R^2$.

$$(x',y')=f(x,y,z)\Leftrightarrow\begin{cases}-2x=x'\\ y+3z=y'\end{cases}$$

On peut prendre par exemple $x=-\frac{x'}{2},\ y=y',\ z=0$.

Conclusion pour n'importe quel $(x',y')\in R^2$ on a $f(-\frac{x'}{2},y',0)=(x',y')\Rightarrow \operatorname{Im} f=R^2$ et f est surjective.

<u>c-) Théorème :</u> Soient E, F deux $K-ev$ et f une application linéaire de E dans F alors :

$$f \text{ est injective } \Leftrightarrow \ker f=\{0_E\}$$

<u>d-) Théorème :</u> Soit $f\in L(E,F)$ et $\{v_1,v_2,........v_n\}$ une famille de vecteurs de E.

(1) Si f est injective et la famille $\{v_1,v_2,........v_n\}$ est libre dans E alors la famille $\{f(v_1),f(v_2),..........,f(v_n)\}$ est libre dans F.

(2) Si f est surjective et la famille $\{v_1,v_2,........v_n\}$ est génératrice de E alors $\{f(v_1),f(v_2),..........,f(v_n)\}$ est génératrice de F.

<u>N-B :</u> En particulier si f est bijective, l'image d'une base de E est une base de F.

<u>e-) Théorème du rang :</u>

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel quelconque et $f\in L(E,F)$.

Les espaces $Kerf$ et $\operatorname{Im} f$ sont de dimensions finies et ces dimensions vérifient :

$$\dim E=\dim\ker f+\dim \operatorname{Im} f$$

<u>N-B :</u> $\dim \operatorname{Im} f=rg(f)$

Deux ev de dimensions finies E et F sur un même K sont isomorphes $(E=F)$ s'ils ont même dimension.

<u>Exemple :</u> Soit $E=K-ev$. E est isomorphe à $K^n\Leftrightarrow \dim E=n$

<u>Remarque importante :</u>

Si $f\in L(E,F)$ alors $rg(f)\le Min(\dim E,\dim F)$

<u>Exercice :</u>

Soit f l'application linéaire définie par :

$$f:R^2\longrightarrow R^2$$
$$(x,y)\longrightarrow f(x,y)=(2x-4y,x-2y)$$

Déterminer $Kerf$ et $\operatorname{Im} f$. Calculer leurs dimensions. f est-elle bijective ?

<u>Solution :</u>

(*) $Kerf=?$

$$Kerf=\{(x,y)\in R^2/f(x,y)=(0,0)\}\Rightarrow\begin{cases}2x-4y=0\\ x-2y=\end{cases}\Leftrightarrow\quad x=2y$$

$Kerf = \{(2y, y) \in R^2 / y \in R\} = \{y(2,1) \in R^2 / y \in R\}$

Donc $Kerf$ est engendré par le vecteur $(2,1) \neq (0,0) \Rightarrow \dim\ker f = 1 \Rightarrow f$ n'est pas injective.

(*) $\operatorname{Im} f = ?$

$\operatorname{Im} f = \{(2x - 4y, x - 2y) / (x, y) \in R^2\}$

On a $(2x - 4y, x - 2y) = x(2,1) + y(-4,-2)$ avec $(x, y) \in R^2$.

Ainsi $\operatorname{Im} f$ est engendré par deux vecteurs qui ne sont pas libres : $(-4,-2) = -2(2,1) \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 1 \Rightarrow f$ n'est pas surjective.

D'après le théorème du rang : $\dim E = \dim\ker f + \dim \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = rg(f) = \dim E - \dim Kerf = 2 - 1 = 1$

f n'est pas bijective, car elle n'est ni injective ni surjective.