

Série de TD-1

Exercice 1 :

Soit E l'ensemble des fonctions numériques f de la variable réelle x définies sur l'intervalle $[0, 1]$ et telles que : $f'(0) = 2f(0)$.

1-) Montrer que E muni de l'addition et de la multiplication par un réel respectivement définies par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \text{est un espace vectoriel sur } \mathbb{R}.$$

2-) En est-il de même de l'ensemble E' des fonctions ϕ définies également sur $[0, 1]$ et telles que :

$$\phi(1) = \phi(0) + 1 ?$$

Exercice 2 :

1-) Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$ -ev $(E, +, \cdot)$. Montrer que $F = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$ est un sous espace vectoriel de E .

2-) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^3$ telles que :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}.$$

a) Montrer que A et B sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

b) A et B sont-ils supplémentaires (i-e : en somme directe) ?

Exercice 3 :

1-) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère les trois polynômes : $P_1 = 1 + X + 2X^2$, $P_2 = 2 - X + X^2$, $P_3 = -4 + 5X + \lambda X^2$.

Montrer que ces trois polynômes sont linéairement indépendants sauf pour une valeur de λ que l'on précisera.

2-) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$e_1 = (1, 1, 1, 1) ; \quad e_2 = (0, 1, 2, -1) ; \quad e_3 = (1, 0, -2, 3) ; \quad e_4 = (2, 1, 0, -1)$$

La famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est-elle libre ? est-ce une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 4 :

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$e_1 = (1, 1, 1, 1) ; \quad e_2 = (0, 1, 2, 1) ; \quad e_3 = (1, 0, -2, 3) ; \quad e_4 = (1, 1, 2, -2)$$

1-) La famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est-elle libre ?

2-) Quel est le rang de la famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$?

3-) Déterminer une relation entre les nombres réels α et β pour que le vecteur $u = (1, 1, \alpha, \beta)$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Exercice 5 :

On considère l'application donnée par :

$$f: \quad R^3 \longrightarrow R^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -x + 2y + 2z \\ -8x + 7y + 4z \\ -13x + 5y + 8z \end{pmatrix}$$

1-) Montrer que f est une application linéaire. Déterminer l'image par f des vecteurs de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de R^3 . Calculer $f(2e_1 + e_2 - e_3)$.

2-) Déterminer le noyau de f . En donner une base et préciser sa dimension.

3-) L'application f est-elle injective? surjective? bijective?

4-) Soit g l'application linéaire donnée par :

$$g: \quad R^2 \longrightarrow R^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

Calculer $f \circ g$.

Exercice 6 :

On considère l'application donnée par :

$$h: \quad R^3 \longrightarrow R^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y + z \\ x \end{pmatrix}$$

Ainsi que les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (1, 1, 1)$.

1-) Montrer que h est linéaire. Déterminer $h(u)$, $h(v)$ et $h(u - 2v)$.

2-) Déterminer $\ker(h)$. En donner une base et préciser sa dimension.

3-) Déterminer $\text{Im}(h)$. En donner une base et préciser sa dimension.

Corrigé de la série de TD-1.

Exo 2:

1- / $F_i = \text{sev} - E$, $i = \overline{1, n}$

on montre que $F = \bigcap_{i=1}^n F_i = \text{sev} - E$

NB: on peut utiliser la démonstration par récurrence. pour $n \geq 2$. on utilise la déf de l'intersection.

Nous devons montrer que $\forall n, y \in F$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
 $n + \alpha y \in F$.

Soient $n, y \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconques.

Par définition de l'intersection: $\forall k = \overline{1, n}$,

$n, y \in F_k$. Comme $F_k = \text{sev} - E$, $\Rightarrow$

$k \in \{1, \dots, n\} : n + \alpha y \in \bigcap_{k=1}^n F_k$.

Ainsi on a $n + \alpha y \in F$

NB: $F \neq \emptyset$ car $0_E \in \bigcap_{k=1}^n F_k = F$.

2- / $A = \text{sev} - \mathbb{R}^3$; $B = \text{sev} - \mathbb{R}^3$.

1) $A = \text{sev} - \mathbb{R}^3$:

.) $A \neq \emptyset$ car $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \mid 0 + 0 + 0 = 0$
 $\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in A$

.) Soient (n, y, z) et $(n', y', z') \in A$
et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$(n, y, z) + \alpha(n', y', z') = (n + \alpha n', y + \alpha y', z + \alpha z')$
-2-

$$(x, y, z) \in A \Rightarrow x + y + z = 0.$$

$$(x', y', z') \in A \Rightarrow x' + y' + z' = 0 \Rightarrow \alpha x' + \alpha y' + \alpha z' = 0$$

$$\Rightarrow (x + \alpha x') + (y + \alpha y') + (z + \alpha z') = 0.$$

$$\Rightarrow (x, y, z) + \alpha (x', y', z') \in A.$$

$$*) B = \text{seu} - \mathbb{R}^3:$$

$$.) B \neq \emptyset \text{ car } 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) / 0 - 0 + 0 = 0.$$

$$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in B.$$

$$\text{Soient } (x, y, z), (x', y', z') \in B \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{on a: } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x' + y' + z' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ \alpha(x' - y' + z') = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x + \alpha x') - (y + \alpha y') + z + \alpha z' = 0$$

$$\Rightarrow (x, y, z) + \alpha (x', y', z') \in B$$

On remarque que le vecteur $u = (1, 0, -1)$ satisfait les 2 équations ($x + y + z = 0$ et $x - y + z = 0$) $\Rightarrow A \cap B$ n'est pas réduit à $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \Rightarrow$ les seu A et B ne sont pas supplémentaires.

Exo 3:

$$\mathcal{L} \subset \mathbb{R}_2[X] = \left\{ \mathcal{L} \in \mathbb{R}[X] \mid \mathcal{L} = a_0 + a_1 X + a_2 X^2, \right. \\ \left. a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathcal{L}_1 = 1 + X + X^2, \quad \mathcal{L}_2 = 2 - X + X^2, \quad \mathcal{L}_3 = -4 + 5X + \lambda X^2$$

$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_3$ sont linéaire-indépendants ssi, il existe des réels α, β et γ non tous nuls, tels que:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \mathcal{L}_1 + \beta \mathcal{L}_2 + \gamma \mathcal{L}_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha(1 + X + X^2) + \beta(2 - X + X^2) + \gamma(-4 + 5X + \lambda X^2) = 0 \\ \Rightarrow (\alpha + 2\beta - 4\gamma) + (\alpha - \beta + 5\gamma)X + (\alpha + \beta + \lambda\gamma)X^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - 4\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 5\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \lambda\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 6\gamma = 0 \\ 3\beta - 9\gamma = 0 \\ (\lambda - 1)\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma \\ \beta = 3\gamma \\ (\lambda - 1)\gamma = 0 \end{cases}$$

Ce dernier système ne fournit des valeurs non tous nuls, pour α, β et γ que si l'on a $\lambda \neq 1$. Donc.

$\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3\}$ est libre ssi $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$

NB: Donc $\lambda = 1 \Rightarrow \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_3$ sont linéaire-dépendants.

2°/ on résout l'équation vectorielle
 $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow$
la résolution du système linéaire:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma + 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \alpha + 2\beta - 2\delta = 0 \\ \alpha - \beta + 3\gamma - \delta = 0 \end{cases}$$

on trouve que la seule solution possible est $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \Rightarrow$
 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est libre.

Puisque son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^4 \Rightarrow$

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exo 41

2°/ $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ libre)?

on résout l'équation vectorielle

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$\Rightarrow$ la résolution du système linéaire suivant:

$$\text{I} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 & (1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 & (2) \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 & (3) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 & (4) \end{cases}$$

on a. $(1) - (2) \wedge (3) - (4) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_2 = \lambda_3 & (\lambda_2 - \lambda_3 = 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 - 5\lambda_3 + 4\lambda_4 = -4\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ (\lambda_2 = \lambda_3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \lambda_4 \quad (\lambda_3 - \lambda_4 = 0)$$

donc le système (I) est équivalent au système (II) suivant:

$$\text{(II)} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Ce système admet d'autres solutions que la solution nulle $\Rightarrow \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ n'est pas libre.

2°/ $\text{rg}[\{e_1, e_2, e_3, e_4\}] = ?$

on pose $F = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

on remarque que $\text{rg } F \leq 3$

on considère alors la famille $G = \{e_1, e_2, e_3\}$

on veut l'est-vectorielle $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0. & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0. & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - 2\gamma = 0. & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0. & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \gamma \end{cases}$$

$$\alpha = 0.$$

$$\beta = -3\gamma \text{ si } \gamma = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) - (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

donc la famille $G = \{e_1, e_2, e_3\}$ est libre

$$\Rightarrow \text{rg } F = \text{rg } G = 3.$$

$$3^\circ/ u = (1, 1, \alpha, \beta)$$

Pour que u appartienne au sex engendré par la famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ il faut que l'équation vectorielle

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$$

admette au moins une solution.

on cherche à rendre le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = \alpha \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 - 2\lambda_4 = \beta \end{cases}$$

on vérifie que ce système est équivalent au système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 & (1) \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 & (2) \\ -\lambda_3 + \lambda_4 = \alpha - 1 & (3) \\ 3\lambda_3 - 3\lambda_4 = \beta - 1 & (4) \end{cases}$$

En considérant les 2 dernières équations (3) et (4), on voit que le système n'a de solution que si :

$$\begin{cases} \lambda_3 - \lambda_4 = 1 - \alpha \\ \lambda_3 - \lambda_4 = \frac{1}{3}(\beta - 1) \end{cases} \Rightarrow (1 - \alpha) = \frac{1}{3}(\beta - 1)$$

$$\Rightarrow \beta - 1 = -3(\alpha - 1) \Rightarrow \boxed{\beta + 3\alpha = 4}$$

Exo 8:

2° f est une app - liné :

on démontre que $\forall (n, y, z), (n', y', z') \in \mathbb{R}^3$
et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$f(\alpha(n, y, z) + \beta(n', y', z')) =$$

$$\alpha f(n, y, z) + \beta f(n', y', z').$$

$$f(\alpha(n, y, z) + \beta(n', y', z')) = f(\alpha n + \beta n', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$$

$$= \begin{pmatrix} -(\alpha n + \beta n') + 2(\alpha y + \beta y') + 2(\alpha z + \beta z') \\ -8(\alpha n + \beta n') + 7(\alpha y + \beta y') + 4(\alpha z + \beta z') \\ -13(\alpha n + \beta n') + 5(\alpha y + \beta y') + 8(\alpha z + \beta z') \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} -n + 2y + 2z \\ -8n + 7y + 4z \\ -13n + 5y + 8z \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -n' + 2y' + 2z' \\ -8n' + 7y' + 4z' \\ -13n' + 5y' + 8z' \end{pmatrix}$$

$$= \alpha f(n, y, z) + \beta f(n', y', z').$$

$$*) B_C = \{e_1, e_2, e_3\} \mid e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (2, 4, 8)$$

$$\begin{aligned} 2e_1 + e_2 - e_3 &= (2, 1, -1) \Rightarrow \\ f(2e_1 + e_2 - e_3) &= 2f(e_1) + f(e_2) - f(e_3) \\ &= 2(-1, -8, -13) + (2, 7, 5) - (2, 4, 8) \\ &= (-2, -13, -29) \end{aligned}$$

2°/ $\text{Ker } f = ?$

$$\text{Ker } f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$$

on a $f(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -x + 4y + 2z = 0 \\ -8x + 7y + 4z = 0 \\ -13x + 5y + 8z = 0. \end{cases}$$

La seule solution de ce système est le vecteur nul $\Rightarrow$

$$\text{Ker } f = \{ 0_{\mathbb{R}^3} \}$$

L'unique base de $\text{Ker } f$ est $\emptyset$, et sa dimension est nulle.

3°/ Puisque $\text{Ker } f = \{ 0_{\mathbb{R}^3} \} \Rightarrow$ l'application f est injective.

Puisque les dimensions des espaces vectoriels de départ et d'arrivée sont toutes deux égales à 3

$\Rightarrow f$ est surjective

Donc f est bijective

$$4^\circ \quad g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (n, y) \longmapsto (n-y, n+y, n+2y)$$

$$f \circ g = ? \quad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$$

on a.

$f \circ g$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(n, y) &= f[g(n, y)] = f \begin{pmatrix} n-y \\ n+y \\ n+2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(n-y) + 2(n+y) + 2(n+2y) \\ -8(n-y) + 7(n+y) + 4(n+2y) \\ -13(n-y) + 5(n+y) + 8(n+2y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3n + 7y \\ 3n + 23y \\ 34y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exo 6: $h: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $h: (n, y, z) \longmapsto (y+z, n)$
 $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, 1, 1)$

1-) h linéaire: Soient $(n, y, z), (n', y', z') \in \mathbb{R}^3$
 et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a:

$$h(\alpha(n, y, z) + \beta(n', y', z')) = h \begin{pmatrix} \alpha n + \beta n' \\ \alpha y + \beta y' \\ \alpha z + \beta z' \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z') \\ \alpha n + \beta n' \end{pmatrix}$$

$$= \alpha h(n, y, z) + \beta h(n', y', z')$$

$$\ast h(u) = h(1, 2, 3) = (5, 1)$$

$$h(v) = h(1, 1, 1) = (2, 1)$$

$$h(u - 2v) = h(u) - 2h(v) = (1, -1)$$

2°) Ker h = $\left\{ (n, y, z) \in \mathbb{R}^3 / h(n, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
 On a:

$$h(n, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ z = -y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Ker } h = \left\{ (0, y, -y) / y \in \mathbb{R} \right\} \\
= \langle (0, 1, -1) \rangle$$

4- a d: $\text{Ker} h$ est le sex engendré par le vecteur $(0, 1, -1)$.

$\Rightarrow \dim(\text{Ker} h) = 1 \Rightarrow$
 $B = \{(0, 1, -1)\}$ est une base de $\text{Ker} h$.

3°/ $\text{Im}(h) = ?$

D'après le théorème du rang:

$$\left(\dim E = \underbrace{\text{rg } f}_{\dim \text{Im } f} + \dim \text{Ker } f \right)$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \text{rg } h + \dim \text{Ker } h.$$

$$\Rightarrow \text{rg } h = 3 - 1 = 2 \text{ .. bon en.}$$

S'écrit que $\text{Im } h = \mathbb{R}^2$ et

on peut prendre n'importe

quelle base de $\mathbb{R}^2$, par exemple la base canonique.

$\{e_1, e_2\}$ / $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$
est une base de $\text{Im } h$.

Algèbre 2 / TD 2 (suite).

(2)

Exo 7: On considère, dans $\mathbb{R}^4$, le sous-ensemble F défini par:

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x+z=0) \wedge (y+t=0) \right\}$$

1/ Montrer que $F = \text{se}_4 - \mathbb{R}^4$.

2/ Donner une base de F , déduire sa dimension.

Solution:

1/ $F = \text{se}_4 - \mathbb{R}^4$?

$$\# \text{ on a } (0, 0, 0, 0) \in F \text{ car } \begin{cases} 0+0=0 \\ 0+0=0 \end{cases} \Rightarrow F \neq \emptyset$$

on montre que $\forall X = (x, y, z, t) \in F$
 $\forall Y = (x', y', z', t') \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $\lambda X + \mu Y \in F.$

$$\text{c-à-d } (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t') \in F.$$

on a:

$$X \in F \Rightarrow (x+z=0) \wedge (y+t=0)$$

$$Y \in F \Rightarrow (x'+z'=0) \wedge (y'+t'=0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda(u+z) = 0 \wedge \mu(w+x) = 0 \\ \wedge \\ \lambda(y+t) = 0 \wedge \mu(y'+t') = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (\lambda u + \mu u') + (\lambda z + \mu z') = 0 \\ (\lambda y + \mu y') + (\lambda t + \mu t') = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda(u, y, t, t') + \mu(u', y', t', t') \in F.$$

2° Base de F:

$$\text{Soit } X = (u, y, t, t') \in F \Leftrightarrow \begin{cases} u+t=0 \\ \wedge \\ y+t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = -t \wedge y = -t$$

donc on aura.

$$X = (u, y, t, t') = (u, y, -u, -y)$$

$$= u(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1)$$

$$\Rightarrow F = \left\{ u(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1) \mid u, y \in \mathbb{R} \right\}$$

d'un F est engendré par les vecteurs (2)
 $v_1 = (1, 0, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, -1)$

$$F = \langle v_1, v_2 \rangle$$

Montrons que la famille $\{v_1, v_2\}$
est libre.

$\{v_1, v_2\}$ est libre ssi $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (0, 0, 0, 0) \stackrel{!}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

ou a.

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 &= (\lambda_1, 0, -\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2, 0, -\lambda_2) \\ &= (\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1, -\lambda_2, 0) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow \{v_1, v_2\} \text{ est libre.}$$

donc $B = \{v_1, v_2\}$ est à la fois
génératrice et libre $\Rightarrow B = \{v_1, v_2\}$
est une base de F

$$\Rightarrow \dim F = 2$$

Exo 8. (supplémentaire)

Soit l'application linéaire :

$$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ -x_1 - 2x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

Calculer le rang de f et
la dimension du noyau de f .

Solution:

2^e méthode: on calcule d'abord
le noyau:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 & (1) \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 & (2) \\ -x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 & (2) \\ -2x_1 - 4x_3 - 2x_4 = 0 & 2 \times (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \textcircled{3}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

on choisit x_3 et x_4 comme paramètres
et on trouve

$$\text{Ker } f = \left\{ (-2x_3 - x_4, -x_3 - x_4, x_3, x_4) / \right. \\ \left. x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Les 2 vecteurs $\widetilde{v_1}$ et $\widetilde{v_2}$ sont liné-indép

$$\Rightarrow \dim(\text{Ker } f) = 2.$$

on applique maintenant le théorème
du rang pour en déduire sans
calcul, la dimension de l'image

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker f$$

$$= 4 - 2 = 2 \Rightarrow$$

$$\operatorname{rg} f = 2$$