chap 01 / — Matrices et Déterminants —

1-1 / Les matrices (Définitions et Opérations).

1-1-1 / Définition d'une matrice

Soit K un corps. Une matrice à coefficients dans K est un tableau rectangulaire d'éléments de K.

On les note sous la forme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

ou sous la forme synthétique :

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ i = indice des lignes.
j = indice des colonnes.

- Les entiers m et n sont les dimensions de la matrice $(m, n \in \mathbb{N}^*)$
- $a_{ij} \in K$ (coefficients de la matrice).
$(K = \mathbb{R}, \quad K = \mathbb{C})$.

Remarque :

- L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans K est noté $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

- Matrice vecteur (ou vecteur) est un type particulier de matrice qui ne dispose que d'une colonne.

$$X = (x_i)_{1 \leq i \leq m} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} ; X \in \mathcal{M}_{m \times 1}(K).$$

- Matrice ligne (ou vecteur ligne). est une matrice $1 \times n$.

$$Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} = (y_1 \; y_2 \cdots y_n) , Y \in \mathcal{M}_{1 \times n}(K).$$

- Il existe plusieurs types de matrices spéciales :

a/ Matrice carrée : $A = (a_{ij}) \; / \; m = n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ La diagonale de A.

on note l'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) =$ ensembles des mat carrés.

b/ Matrice diagonale

une mat-carrée A est dite diagonale si $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A = matrice diagonale d'indice n.

La notation pour une mat-diagonale d'ordre n est :

$$A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots a_n) = \operatorname{diag}\left[(a_i)_{1 \leq i \leq n} \right]$$

$$(a_1 = a_{11},\ a_2 = a_{22},\ \dots,\ a_n = a_{nn}).$$

Si $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, la matrice est dite matrice identitée (ou unité).

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

1-1-2 / Opérations sur les matrices :

L'ensemble $M_{m,n}(\mathbb{R})$ est naturellement muni d'une addition interne (on peut ajouter 2 matrices de même dimensions) et d'une multiplication externe (multiplier une matrice par un réel).

a/ Addition : Si $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$ avec $A, B \in M_{mp}(\mathbb{R})$.

alors $A + B = C = (c_{ij}) \mid c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Exple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b/ <u>Multiplication externe</u> :

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda . A = (\lambda a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

<u>Exple</u> :

$$-2 . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>NB</u> : $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +, \times)$ est un espace vectorielle isomorphe à $\mathbb{R}^{m.n}$.

La base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est formée de matrices dont tous les coefficients sont nuls, sauf un qui vaut 1.

c/ <u>Produit matriciel</u> :

c-1 */ <u>Définition</u> : Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,

$\cancel{B = (b_{jk})}$ $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle produit matriciel de A par B, la matrice $C = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$

avec :

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \text{—} & \text{—} & & \text{—} \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \text{—} & \text{—} & & \text{—} \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ \text{—} & \text{—} & & \text{—} \\ c_{m1} & \cdots & & c_{mp} \end{pmatrix}$$

$$\underset{(m,n)}{A} \cdot \underset{(n,p)}{B} = \underset{(m,p)}{C}.$$

<u>Exple</u> :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{A \\ \underbrace{(3,2)}_{\text{dim}}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{B \\ \underbrace{(2,4)}_{\text{dim}}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 \\ -9 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}}_{\substack{C \\ (3,4)}}$$

c-2/ Propriétés

Le produit matriciel possède les props suivantes :

(i) $A.B \neq B.A$ / $\underset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = ?$

(ii) $A.(B C) = (A.B).C$

(iii) Linéarité à droite :

$$A.(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC.$$

Linéarité à gauche :

$$(\lambda A + \mu B).C = \lambda AC + \mu . BC$$

(iv) $I_n . A = A . I_n = A$; (v) $A.B = 0 \not\Rightarrow A = 0$ et $B = 0$.

d) Matrice transposée :

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, sa transposée est la matrice notée $A^t \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ dont les coefficient d'ordre (j,i) est a_{ij}

si $A = (a_{ij})$, $A^t = B = (b_{ij})$. $\boxed{b_{ij} = a_{ji}}$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\dim A = 3 \times 2$ $\qquad$ $\dim A^t = 2 \times 3$.

NB Pour écrire la transposée d'une mat, il suffit de transformer ses lignes en colonnes

Propriété de la transposée :

(i) $(A^t)^t = A$

(ii) $(AB)^t = B^t . A^t$

$(A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \; ; \; B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))$

(iii) $(A . A^t)^t = (A^t)^t . A^t = A . A^t$

d) Puissance :

On définit la puissance k de la matrice carrée A de taille n pour l'entier $k \geq 0$ de la façon suivante :

$$A^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k = 0 \\ A^{k-1} . A = \underbrace{A \ldots A}_{k \text{ fois}} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

NB : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $k, \ell \in \mathbb{N}$:

(i) $A^k . A^\ell = A^{k+\ell}$

(ii) $(A^k)^\ell = A^{k.\ell}$

(iii) $(\lambda . A)^k = \lambda^k . A^k$

e) Inverse d'une matrice

e-1/ Définition:

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Une matrice B carrée d'ordre n est appelée inverse de A si :

$$A . B = B . A = I_n .$$

NB : . si B existe, elle est unique.

- on notera B par A^{-1} ($B = A^{-1}$).
- si A n'est pas inversible, elle est dite singulière.

e-2/ Théorème :

Si A et B sont deux matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ alors le produit (A.B) est inversible et son inverse est :

$$(AB)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$$

1-1-3/ Déterminant

On associe à chaque matrice carrée un nombre permettant de déterminer si elle est inversible : le déterminant.

Le déterminant d'une matrice n'est défini que si la mat est carrée

a/ */ <u>Définition du det</u>:

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Le déterminant de la matrice A est la somme des produits des éléments d'une ligne ou une colonne, multipliée par leurs cofacteurs correspondants.

b/ */ <u>Calcul du det en développant selon toute ligne fixe i</u>

$$\det A = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \leftarrow$ Cofacteur.

$M_{ij} \leftarrow$ Mineur d'ordre i et j : c'est le déterminant de la sous-matrice $(n-1).(n-1)$ de la matrice $(n \times n)$ A obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.

*/ Calcul du déterminant en développant selon toute colonne fixe j :

$$\det A = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

- Remarque - (Notions de Mineur, cofacteur et matrice de cofacteurs).

*/ Mineur : $M_{ij} = M_{ij}(A)$.

Le mineur M_{ij} de l'élément a_{ij} $\left(\begin{matrix} i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n} \end{matrix}\right)$ est le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en effaçant la $i^{ème}$ ligne de A et la $j^{ème}$ colonne de A.

*/ Cofacteur : $A_{ij} = Cof_{ij}(A)$.

Le cofacteur de l'élément a_{ij} est le scalaire : $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

*/ Matrice de cofacteur :

La matrice de cofacteurs de A est la matrice :

$$\text{Cof}(A) = \left(\text{Cof}_{ij}(A)\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$= \left(A_{ij}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

__Exemple:__

Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

- Déterminer la matrice de cofacteur de A
- Calculer $\det A$.

__Réponse:__

*/ $\text{Cof}(A) = ?$ $\quad \left(\text{Cof}_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij} \right)$

$$\text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \;, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 3 \;, \; ----$$

$$\text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & 8 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*) Det A = ? (En cherche tjs la ligne ou la colonne qui contient le plus de 0)

$\det A = 1 \times M_{11} + 3\, M_{31} = -2 - 9 = -11.$

c) <u>Propriétés du déterminant</u>.

(i) $\det I_n = 1$.

(ii) $\det \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 \ldots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$

(iii) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. avec $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

(iv) $\det A^{-1} = 1 / \det A$.

d) <u>Théorème</u>: La matrice ~~Soit~~ $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible ssi $\det A \neq 0$.

e) <u>Méthodes de Calculs de l'inverse d'une matrice</u>

Il existe plusieurs méthode de Calculs de l'inverse d'une matrice carrée A d'ordre n.

e-1) La méthode des cofacteurs:

Soit $A=(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ / $\det A \neq 0$

alors A possède une inverse A^{-1}, donnée par:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \underbrace{{}^t[Cof(A)]}$$

matrice des cofacteur transposée.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Cof(A) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & 8 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det = -11$

$$A^{-1} = \frac{-1}{11} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

(NB: vérifier $A \cdot A^{-1} = I_3$).

e-2) Méthode directe.

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$ / $A^{-1} = ?$

On pose $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow x_{ij} = ?$

Cela revient à résoudre un système de 9 équations à 9 inconnues.

$$A \cdot A^{-1} = I_3 \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} + x_{32} = 0 \\ \vdots \\ 3x_{13} - 2x_{13} = 1 \end{cases}$$

Méthode très longue lorsque n est grand.

1-2/ Matrices et Applications linéaires

1-2-1./ Matrice associée à une application linéaire.

a) Définition : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, munis respectivement des bases $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ et $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$.

Soit f une application linéaire de E vers F

$$f : \underset{(\dim E = n)}{E} \longrightarrow \underset{(\dim F = m)}{F}$$

La matrice de f relativement aux bases B et C, notée $M(f \mid B, C)$ est la matrice du système $S = \{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ relativement à la base $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$.

<u>Remarque</u> : si $B = (b_1, \dots, b_n)$ et $C = (c_1, \dots, c_m)$

alors

$$M(f \mid B, C) = \begin{array}{c|l} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \left.\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \\ c_m \end{matrix}\right\} \text{arrivée} \\ \underbrace{\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow \\ f(b_1) & f(b_2) & & f(b_n) \end{matrix}}_{\text{Depart}} & \end{array}$$

$M(f \mid B, C) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

les images des vecteurs $b_1, b_2, \dots, b_n$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $c_1, c_2, \dots, c_m$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$.

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i \Rightarrow \begin{cases} f(b_1) = \text{\_\_\_\_} \\ f(b_2) = \text{\_\_\_\_} \\ \vdots \\ f(b_n) = \text{\_\_\_\_} \end{cases}$$

$j = \overline{1, n}$.

NB: La matrice $M(f \mid B, C)$ dépend des bases choisies B et C.

Exemple 1: Soit f :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & f(x, y) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \\ y - x \end{pmatrix} \end{array}$$

Soient :

$B = (b_1, b_2) \equiv$ base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$b_1 = (1, 0)$; $b_2 = (0, 1)$.

$C = (c_1, c_2, c_3) \equiv$ base canonique de $\mathbb{R}^3$

$c_1 = (1, 0, 0)$; $c_2 = (0, 1, 0)$; $c_3 = (0, 0, 1)$.

Calcul de la Matrice associé à f relativement aux bases B et C.

$M(f|B,C) \in M_{3,2}(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$f(b_1) = (1,1,-1) = c_1 + c_2 - c_3$$
$$f(b_2) = (-1,1,1) = -c_1 + c_2 + c_3 \Rightarrow$$

$$M(f|B,C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Exemple</u> ②: même $f(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \\ y-x \end{pmatrix}$

avec:

$B = (b_1, b_2) \mid b_1 = (1,1) ; b_2 = (-1,1)$.

$C = (c_1, c_2, c_3) \mid c_1 = (1,1,1) ; c_2 = (0,1,0)$.

$c_3 = (-1,-1,1)$.

on a:

$$f(b_1) = (0,2,0) = 2c_2.$$

$$f(b_2) = (-2,0,2) = 2.(0,1,0) + 2(-1,-1,1) = 2.c_2 + 2c_3.$$

donc $M(f|_{B,C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

<u>NB</u> : $M(f)_{①} \neq M(f)_{②}$

*/ <u>Propriétés</u>

(i) <u>Matrice de la composée</u> :

Si $f : \underset{(n)}{E} \longrightarrow \underset{(m)}{F}$ avec B base de E

$g : F \longrightarrow \underset{(p)}{G}$. C " F.

D " G.

alors la matrice associée à $(g \circ f)$:

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G.$$

$$u \longmapsto (g\circ f)(u) = g[f(u)]$$

$$M(g\circ f / _{B\,D}) = M(g|_{C,G})\,M(f|_{B,C})$$

(ii) La matrice associée à l'application linéaire $(\lambda f + \mu g)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et f et g 2 applications définies dans les même bases au départ et à l'arrivée est :

$$\lambda M(f/_{B,C}) + \mu M(g/_{B,C}).$$

1-2-2) <u>Ecriture matricielle d'une application linéaire</u>

Soit f une application linéaire de $E \longrightarrow F$. (E et F 2 K-ev) et B_E, B_F sont les bases respectives de E et F, X le vecteur unicolonne des coordonnées d'un élément $X \in F$, Y le vecteur unicolo des coordonnés d'un élément image de X par f :

$$Y = f(X) \in F \quad (Y = M(f/_{B_E, B_F})X)$$

On a donc $Y = M_f \cdot X$

<u>Exemple</u>:

Soit f : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x \\ -x + 3y \end{pmatrix}$$

$B_{\mathbb{R}^2}$ et $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^3}$ leurs bases canoniques,

$M_f = ?$; $f(2,1) = ?$

on pose ${}^{t}Y = (x', y', z') \Rightarrow$

$$Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x \\ -x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1-3/ Changement de bases et Matrices de passage

1-3-1/ Matrice de passage :

a/ **Définition :** Soit E = K-ev de dimension finie ($\dim E = n$) et soient $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E.
La matrice de passage de B (ancienne base) à B' (nouvelle base), notée $P_B^{B'} = (a_{ij}) \in M_n(K)$ est définie par :

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i \; ; \; \forall j = \overline{1,n}$$

NB : La $j^{ème}$ colonne de $P_B^{B'}$ est constituée des composants de e'_j exprimées dans l'ancienne base.

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}$-ev.

On considère 2 bases de $\mathbb{R}^2$.

$B = (i, j)$ (base canonique) : $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$B' = (i', j')$: $i' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$; $j' = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$P_B^{B'} = ?$$

on a : $\begin{cases} i' = \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j \\ j' = \frac{-3}{2} i + \frac{3}{2} j \end{cases} \Rightarrow P_B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -3/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

b) Théorème :

Soit $E = K$-ev / $\dim E = n$. Soient $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E ; Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, le vecteur des composants de X dans la base E $(X \in E_B)$

$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ le vecteur des composants de X' dans la base B' $(X' \in E_{B'})$

alors. $\underline{X} = P_B^{B'} \underline{X'}$

<u>Demonstration</u>:

$$\underline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j \right) e_i$$

Conclusion. $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j \iff$

$$\boxed{\underline{X} = \underline{P}_B^{B'} \underline{X'}} \quad \left(\underline{X'} = P_{B'}^{B} \underline{X} \right)$$

<u>c/ Propriétés</u>:

(i) Toute matrice de passage est inversible.

et $\left(P_B^{B'} \right)^{-1} = P_{B'}^{B}$

(ii) $P_B^B = I_n$.

(iii) Si B_E, B'_E, B''_E sont 3 bases de E

alors. $P_B^{B''} = P_B^{B'} \times P_{B'}^{B''}$

1-3-2) Changement de Matrice

a) Théorème:

Soit f une application linéaire de $\overset{n}{\underset{\downarrow}{E}}$ vers $\overset{m}{\underset{\downarrow}{F}}$.

Si B_E et B'_E sont 2 bases de E et
B_F et B'_F " " F.

alors:

$$M(f/B'_E, B'_F) = \left(P_{B_F}^{B'_F}\right)^{-1} . M(f/B_1, B_2) . P_{B_E}^{B'_E}$$

$$= P_{B'_F}^{B_F} . M(f/B_1, B_2) . \left(P_{B'_E}^{B_E}\right)^{-1}$$

on pose.

NB: $P = P_{B_E}^{B'_E}$, $Q = P_{B_F}^{B'_F}$ $\Rightarrow$

$$M'(f) = Q^{-1} M(f) . P = Q M(f) P^{-1}$$

Remarque: Cas d'un endomorphisme:
$(E = F$, $B_E = B_F = B$, $B'_E = B'_F = B')$

$(P = Q)$
$\Rightarrow$ $M'(f) = P . M(f) . P^{-1}$.
(P^{-1} inverse de P).

<u>Exemples</u> $E=\mathbb{R}^2$ et $F=\mathbb{R}^3$.

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y)=\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \\ y-x \end{pmatrix} \end{array}$$

•) Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les bases :

$$B_E = B_1 = \{u_1, u_2\} \mid u_1=(1,0) \wedge u_2=(0,1)$$

$$B'_E = B'_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\} \mid \bar{u}_1\ (1,1) \wedge \bar{u}_2=(-1,1)$$

•) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les bases :

$$B_F = B_2 = \{v_1, v_2, v_3\} : v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} ; v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$
$$v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$$B'_F = B'_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} ; \bar{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} ; \bar{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$
$$\bar{v}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Déterminer $M(f \mid B'_1, B'_2)$.

<u>(Solution)</u>

on a :

$$M(f \mid B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et}$$
$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ & f(u_1) & f(u_2). \end{array}$$

2×3.

$$P_{B_1}^{B'_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $M(f|_{B'_1, B'_2}) = \left(P_{B_2}^{B'_2}\right)^{-1} \cdot M(f|_{B_1, B_2}) \cdot P_{B_1}^{B'_1}$

$$= P_{B'_2}^{B_2} \cdot M(f|_{B_1, B_2}) \cdot P_{B_1}^{B'_1}$$

$P_{B'_2}^{B_2} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tels que chaque vecteur-colonne de $P_{B'_2}^{B_2}$ possède les coordonnées exprimées dans la base B_2.

On a $\begin{cases} \bar{v}_1 = v_1 + v_2 + v_3 \\ \bar{v}_2 = v_2 \\ \bar{v}_3 = -v_1 - v_2 + v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{1}{2}\bar{v}_1 - \bar{v}_2 - \frac{1}{2}\bar{v}_3 \\ v_2 = \bar{v}_2 \\ v_3 = \frac{1}{2}\bar{v}_1 + \frac{1}{2}\bar{v}_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow P_{B'_2}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

donc

$$M(f|_{B'_1, B'_2}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M(f|_{B_1', B_2'}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Matrices semblables :

*) Définition :

Soient A et B deux matrices de $M_n(K)$.

On dit que la matrice B est semblable à la matrice A s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(K)$ telle que :

$$B = P^{-1} . A . P .$$

NB : « être semblable » est une relation d'équivalence.

(reflexive, symétrique, transitive).

c) Matrices équivalents.

*) Déf : Deux matrices A et B de $M_{m,n}(K)$ sont dites équivalents ssi il existe deux matrices inversibles $P \in M_n(K)$ et $Q \in M_m(K)$, telle que

$$B = Q^{-1} . A . P .$$

1-4) Rang d'une matrice.

a) Définition:

Soit $A=(a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$, le nombre de vecteurs colonnes (ou vecteurs lignes) linéairement indépendants s'appelle rang de A, il est noté par $rg(A)$.

Remarque:

$rg(A) =$ au plus grand ordre des mineurs non nuls de cette matrice.

Exemple:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1, \quad rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$\text{ordre } A = \dim A = m \times n.$

$\text{ordre}(e_1, e_2, \dots, e_n) = n.$

$\text{ordre} \neq rg.$

b) Propriétés:

(i) $rg(0) = 0$, $rg(I_n) = n$.

(ii) $\forall \lambda \in K \mid \lambda \neq 0 : rg(\lambda A) = rg(A)$

(iii) si $A \in M_{m,n}(K)$ alors $\text{rang}(A) \leq \text{Inf}(m,n)$

(iv) si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ alors

$$rg(A) = n \iff \det A \neq 0.$$

(v) si $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, alors

$$rg(A+B) \leq rg(A) + rg(B)$$

(vi) si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$

alors $rg(AB) \leq \inf(rg(A), rg(B))$

~~Exemples~~

c) Théorème (Calcul du rang par matrices bordées).

Une matrice A est de rang r ssi les deux assertions suivantes sont satisfaites :

(i) Il existe une sous-matrice S de A de dimension r telle que $\det S \neq 0$

(ii) toutes les sous-matrices qui bordent S possèdent un déterminant nul.