Série de TD-2

Exercice 1 :

Calculer les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 4 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \; ; \; B=\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & b & a\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}1 & a & c\\ 1 & b & b\\ 1 & c & a\end{pmatrix} \; (a,b,c)\in R^3 \; ; \quad C=2B-{}^tB+I_3 \; .$$

Exercice 2 :

On dit que deux matrices A et B commutent si $A.B=B.A$. Trouver toutes les matrices qui commutent avec A : $A=diag(1,3,5)$

Exercice 3 :

1) Soit $A(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in M_2(R)$, pour $\theta\in R$. Calculer $A(\theta).A(\theta')$ et $[A(\theta)]^n$ pour $n\geq 1$.

2) Pour $x\in R$: $B(x)=\begin{pmatrix}chx & shx\\ shx & chx\end{pmatrix}\in M_2(R)$.

a) Calculer $B(x).B(y)$ et en déduire la matrice inverse de $B(x)$.

b) Calculer $[B(x)]^n$ pour $n\in Z$.

Exercice 4 :

1-) Calculer (s'il existe) l'inverse des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1 & \bar{z} & \bar{z}^2\\ z & 1 & \bar{z}\\ z^2 & z & 1\end{pmatrix} \; (z=x+iy)\in C \; ; \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} .$$

N-B : Utiliser la méthode de la comatrice (méthode des déterminants) pour le calcul de l'inverse d'une matrice inversible.

2-) En utilisant les opérations sur les lignes (ou sur les colonnes), calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix}2 & -1 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 4 & -5\\ -2 & 4 & 3 & 1\\ 0 & -3 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

3-) Calculer (s'il existe) l'inverse des matrices suivantes en utilisant la méthode du pivot de Gauss:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 4 & -5\\ -2 & 4 & 3 & 1\\ 0 & -3 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Exercice 5 :

1) Soient A et B deux matrices de $M_n(K)$. On suppose que $A.B=I_n+A+A^2$.

- Montrer que A est inversible et calculer A^{+1}.
- En déduire que A et B commutent.

2) Pour quelle valeur de x la trace de la matrice A est minimale ? Et pour quelle valeur de x est-elle maximale ?

$$A=\begin{pmatrix} 2x^3 & 1 & 1 \\ 0 & 3x^2 & 2 \\ 5 & 6 & -12x \end{pmatrix}$$

Exercice 6 :

Soit f l'application linéaire définie par : $\begin{aligned} f:\ & R^2 \to R^3 \\ & (x,y) \mapsto f(x,y)=(x-y, x+y, y-x) \end{aligned}$

Déterminer la matrice $M(f/B,C)$ associée à f selon les cas suivants :

a) B et C sont respectivement les bases canoniques de R^2 et de R^3.

b) B est une base de R^2 : $B=(b_1,b_2)$ avec $b_1=(1,1)$ et $b_2=(-1,1)$ et C une base de R^3 : $C=(c_1,c_2,c_3)$ avec $c_1=(1,1,1)$, $c_2=(0,1,0)$ et $c_3=(-1,-1,1)$

Exercice 7 :

Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 12 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \quad (a \in R)$$

Exercice 8 (supplémentaire) :

On considère l'application f de R^4 dans R^4 définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by+t \\ bx+ay+z \\ y+az+bt \\ x+bz+at \end{pmatrix} \quad \text{ou } a \text{ et } b \text{ sont des paramètres.}$$

1) Ecrire f sous forme $f(X)=A.X$ et donner sa matrice dans les bases canoniques.

2) On considère les 4 vecteurs :

$V_1=(1,1,1,1)$, $V_2=(-1,1,-1,1)$, $V_3=(-1,-1,1,1)$, $V_4=(1,-1,-1,1)$

Ecrire les images de V_1, V_2, V_3, V_4 par f, d'abord dans la base canonique, puis dans la base (V_1,V_2,V_3,V_4).

3) Ecrire la matrice de f dans la base (V_1,V_2,V_3,V_4) (au départ et à l'arrivée).

4) Ecrire la matrice de passage P de la base canonique dans la base (V_1,V_2,V_3,V_4).

5) Vérifier vos calculs à l'aide d'une formule du cours, après avoir inversé P.