

Chapitre 2 : Systèmes d'équations linéaires -

(3) (S_e) est toujours compatible car le n -uplet $(0, 0, \dots, 0)$ est toujours solution de (S_e) .

b) Ecriture matricielle d'un système:
Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(K)$ (i.e. matrice de (S))
 $B = (b_i) \in M_{n,1}(K)$; $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$.
Le système (S) s'écrit matriciellement:

$$(S) \quad A \cdot X = B$$

NB:

le vecteur B est le second membre de (S) .
le rang de A est le rang de (S) .

Remarque importante!

(1) le système (S) est défini à l'aide de 3 paramètres (m, n, r) :

m équations, n inconnues, $r = \text{rang}(S)$

(2) si $m = n \Rightarrow$ le système est dit carré et
 $\det[(S)] = \det(A)$.

c) Ecriture avec une application linéaire

Soient $E = K\text{-ev}$, $F = K\text{-ev}$ avec

$\dim E = m$, $\dim F = n$, $B = (e_1, e_2, \dots, e_m)$
une base de E et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une
base de F

Soit f l'application linéaire:

$$f: E \longrightarrow F \text{ avec } M(f/B, B') = A$$

(2)

On note $X = \sum_j x_j e_j \in E$, $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

$$B = \sum_i b_i e_i \in F$$

le système (S) s'écrit : $f(X) = B$

NB: (S) est compatible ssi $B \in \text{Im}(f)$.

2-2 / Méthodes de résolution d'un SEL

a) Méthode de Cramer:

a-1) Déf d'un système de Cramer:

Un système (m, n, r) est dit de Cramer ssi $m = n = r$.

NB: (S) est de Cramer $\Leftrightarrow \det(S) \neq 0$.

* Un système de Cramer admet une et une seule solution X.

Démonstration: on a (S') : $AX = B$

Puisque $m = n$, A est carrée, $r = n \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow$

$$AX = B \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}}_{\text{In}} A X = A^{-1} B \Rightarrow$$

$$\boxed{X = A^{-1} B}$$

cette méthode est aussi appelée :
méthode de résolution par inversion
matricielle.

b) Théorème: (Formules de Cramer).

Soit (S') : $AX = B$ un système de Cramer de n équations, soit $X_0 = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'unique solution de (S') alors:

$$\forall i = \overline{1, n} : x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

on: $\Delta = \det A = \det(c_1, c_2, \dots, c_n)$

$$\Delta_i = \det(c_1, c_2, \dots, c_{i-1}, B, c_{i+1}, \dots, c_n)$$

NB: $c_i (i = \overline{1, n})$ sont les colonnes de A .

Exemple: Résoudre dans $\mathbb{C}$, le système (S):

$$(S) \begin{cases} x + y + z = j^2 \\ x + jy + j^2 z = j \\ x + j^2 y + jz = 1 \end{cases} \quad \text{on } j = e^{i2\pi/3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

on a:

$$\underbrace{AX=B}_{(S)} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}}_B$$

$$\underbrace{\det A}_{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = 3j^2 - j^4 - 2j \neq 0$$

(S) est de Cramer et admet donc une solution unique (x, y, z) , telle que:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} j^2 & 1 & 1 \\ j^2 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix}}{\Delta} =$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & j^2 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & 1 & j \end{vmatrix}}{\Delta} =$$

(4)

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & t^2 \\ 1 & t & t \\ 1 & t^2 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} =$$

Exercice: Soit (S) le système paramétrique suivant.

$$(S) \begin{cases} x + y = 1 \\ x + t^2 y = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \text{ (paramètre)}$$

Resoudre (S).

Solution: (S) : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$

$$D = \det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{vmatrix} = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

On distingue les cas suivants:

* / si $t^2 - 1 \neq 0$ ($t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$) $\Rightarrow$ (S) et de Cramer $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ t & t^2 \end{vmatrix}}{t^2 - 1} = \frac{t}{t+1} \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix}}{t^2 - 1} = \frac{1}{t+1} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (S) \text{ admet une} \\ \text{solution unique} \\ \begin{cases} x = t/(t+1) \\ y = 1/(t+1) \end{cases} \end{array} \right\}$$

* / si $t^2 - 1 = 0$ ($t = 1$ v $t = -1$).

$$* / \text{si } t = 1: \Rightarrow (S)_{t=1} : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow x + y = 1$$

$\Rightarrow (S)_{t=1}$ admet une infinité de solutions

$$(x, 1-x) \mid x \in \mathbb{R}.$$

*1) Si $t = -1 \Rightarrow (S)_{t=-1} \begin{cases} x+y=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$
 les 2 eqts sont incompatibles $\Rightarrow$ pas de solutions.

Remarque: On dit que deux systèmes (S) et (S') sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

b) Méthode du pivot de Gauss:

b-1) Introduction:

L'algorithme du pivot de Gauss permet de transformer un système linéaire quelconque en un système triangulaire, toujours facile à résoudre:

$$(S) \quad AX = B \quad \longrightarrow \quad (S)' \quad A'X = B'$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \diagup & X \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Avant de détailler l'algorithme du pivot de Gauss, on a besoin de certaines notions sur les matrices échelonnées.

b-2) Échelonnement d'une matrice:

*1) Définitions:

*1) le pivot: le pivot d'une ligne d'une matrice est le premier élément non nul de cette ligne.

*1) Matrice échelonnée:

La matrice $A = (a_{ij})$ est dite échelonnée (par rapport aux lignes), si le nombre des premiers coefficients nuls successifs de chaque ligne est strictement croissant.

Exemple:

$$*1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{pivot} / L_1 = 1 \\ \text{pivot} / L_2 = 1 \\ \text{pivot} / L_3 = 1 \\ \text{pivot} / L_4 = 1 \end{matrix}$$

A est échelonnée

$$*1) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

B n'est pas échelonnée

*2) Théorème:

Toute matrice se transforme en une matrice échelonnée par une suite d'opérations élémentaires.

NB: Opérations élémentaires sur les lignes.

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice sont les suivantes:

(1) $L_i \leftrightarrow L_j$ (on échange la ligne d'indice i avec la ligne d'indice j)
 $i \neq j$

(2) $L_i \leftarrow a \cdot L_i$ ($a \neq 0$)
(on multiplie la ligne d'indice i par le réel $a \neq 0$)

(3) $L_i \leftarrow L_i + L_j$ (Somme de 2 lignes)

(4) $L_i \leftarrow L_i + b L_j$ ($b \in \mathbb{R}$)
(combinaison des lignes i et j)

NB!

(3) $\wedge$ (4) $\Leftrightarrow L_i \leftarrow a L_i + b L_j$
 $a \neq 0 ; b \in \mathbb{R}$.

*** / Définition:

On appelle rang d'une matrice A , le nombre de lignes non identiquement nulles de sa matrice échelonnée associée.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg } A = 3$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg } B = 2$

****/ Matrice augmentée d'un système:

Soit (S) $AX = B$ un système linéaire.

Si on ajoute le vecteur colonne B à la matrice des coefficients A , on obtient ce qu'on appelle la matrice augmentée de (S). Elle est notée: $[A|B]$.

Exemple:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_B \Rightarrow [A|B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Ex-3/ Algorithme du pivot de Gauss.

Soit (S) $AX = b$ avec $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $b = (b_i)_{1 \leq i \leq m}$.
On note $[A|b]$ la matrice augmentée de (S).

L'algorithme du pivot de Gauss permet dans un premier temps d'obtenir la matrice échelonnée de $[A|b]$ (i.e. matrice triangulaire supérieure), puis dans un second temps de calculer les inconnues x_j .

Cet algorithme repose sur des étapes:

Etape j: En permutant éventuellement deux lignes de la matrice augmentée, on peut supposer $a_{jj} \neq 0$ (appelé pivot de l'étape j). On transforme toutes les lignes L_i avec $i > j$:

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j$$

Ainsi, on élimine l'inconnue x_j dans chaque ligne L_i .

En répétant le procédé pour i de 1 à m ($i=1, 2, \dots, m$), on aboutit à un système échelonné.

Exemple: Résoudre par la méthode du pivot de Gauss, le système (S):

$$(S) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

On écrit la matrice augmentée de (S).

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(10)

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Etape 1: on a $a_{11} = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$$[A|b]_{\text{Et1}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{1} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{1} L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{4}{1} L_1 \end{array}$$

Etape 2: on a $a_{22} = -1 \neq 0 \Rightarrow$

$$[A|b]_{\text{Et2}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2 \end{array}$$

Etape 3: on a $a_{33} = -4 \neq 0 \Rightarrow$

$$[A|b]_{\text{Et3}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{array}$$

on calcule maintenant le vecteur.

Solution:

$$40 \cdot x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0.$$

$$\underbrace{-4x_3 + 4x_4 = 0}_{=0} \Rightarrow x_3 = 0.$$

$$\underbrace{-x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0}_{=0} \Rightarrow x_2 = 0.$$

$$\underbrace{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1}_{=0} \Rightarrow x_1 = 1$$

la solution est donc, $(1, 0, 0, 0)$.

Remarque: Si au début, le pivot se présente comme suit, on permute les lignes avec un pivot $\neq 0$.

Exemple:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_b.$$

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}.$$

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}.$$

$(a_{11} = 1 \neq 0)$ et on commence l'algo. du pivot de Gauss.
(12)

2-3/ Théorème ($\text{rg}(S)$)

Le système (S): $AX = b$ de m équations à n inconnues est compatible ssi:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}([A|b])$$

Remarque: on distingue les cas suivants:

(a) si $m = n$: la matrice A est carrée d'ordre n et on a:

(a-1) si $\text{rg}(A) = n$ ($\det A \neq 0$) $\Rightarrow$
 $\text{rg}(A) = \text{rg}([A|b])$ et la solution
est unique.

(a-2) si $\text{rg}(A) = \text{rg}([A|b]) < n \Rightarrow$
il y a une infinité de solutions.

(a-3) si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}([A|b]) \Rightarrow$
il n'y a pas de solutions.

(b) si $m < n$:

(b-1) si $\text{rg}(A) = \text{rg}([A|b]) \leq m < n \Rightarrow$
il y a une infinité de solutions.

(b-2) si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}([A|b]) \Rightarrow$
pas de solutions.

(c) si $m \geq n$:

(c-1) si $\text{rg}(A) = \text{rg}([A|b]) = n \Rightarrow$
une seule solution.

(c-2) si $\text{rg}(A) = \text{rg}([A|b]) < n \Rightarrow$
une infinité de solutions.

(c-3) si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}([A|b]) \Rightarrow$
pas de solutions.

- Remarque importante:

Soit (S): $AX = b$ avec $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$
on a:

$$\begin{cases} 0 \leq \text{rg}(A) \leq \text{Min}(m, n) \\ \text{rg}(A) \leq \text{rg}([A|b]) \leq \text{Min}(m, n+1) \end{cases}$$

- Fin -