

أولاً: خطوات اختبار الفرضيات المتعلقة بالمتوسط

تخضع عملية اختبار الفرضيات المتعلقة بمتوسط المجتمع إلى الخطوات التالية:

1. صياغة الفرضيات: تتخذ الفرضية الصفرية والبديلة إحدى الحالات التالية حسب طبيعة الاختبار (من جهة واحدة أو من جهتين):

الجدول رقم (01): صيغ الفرضية الصفرية والبديلة في اختبارات متوسط واحد

طبيعة الاختبار	صيغة الفرضية الصفرية والبديلة
الاختبار من جهتين	$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$
الاختبار من جهة واحدة	جهة اليمين $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$
	جهة اليسار $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$

حيث:

μ_0 : يمثل المتوسط الفرضي (وهو عدد ثابت)

2. اختيار إحصاء الاختبار: بالنسبة لإحصاء الاختبار للفرضيات المتعلقة بالمتوسط فهي حسب شروط المعاينة ستكون واحدة من الحالات الثلاثة التالية:

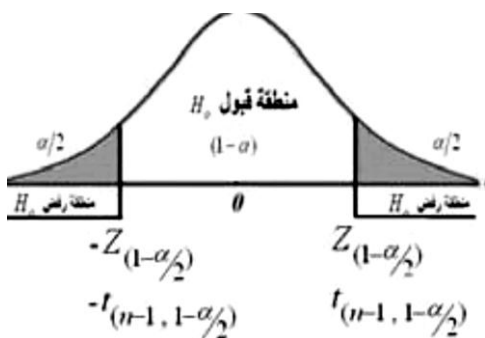
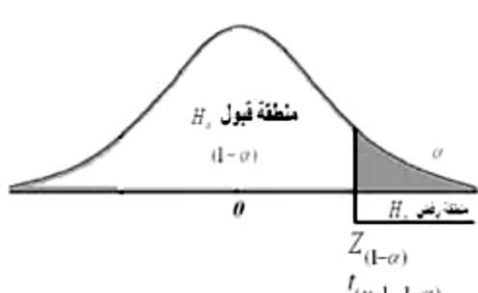
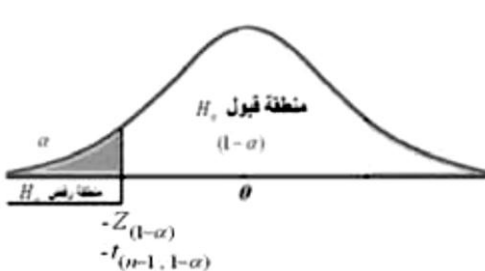
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim T_{v,\alpha} \text{ أو } Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim N(0.1) \text{ أو } Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} \sim N(0.1)$$

وبعد اختيار الإحصاء المناسبة يتم التعويض العددي للحصول على قيمة إحصاء الاختبار المحسوبة

$$(t_{cal} \text{ أو } Z_{cal})$$

3. تحديد القيمة أو القيم الحرجة: تستخرج من جدول التوزيع الطبيعي أو توزيع ستودنت -حسب الحالة-، وهي عبارة عن قيم t أو Z الموافقة لاحتمال α إذا كان الاختبار من جهة واحدة (جهة اليمين أو اليسار) أو الموافقة لاحتمال $(1 - \frac{\alpha}{2})$ (أو $\frac{\alpha}{2}$) إذا كان الاختبار من جهتين. وبناءً على القيم الحرجة يتم تشكيل مناطق الرفض والقبول للفرضية الصفرية كما يلي:

الجدول رقم (02): القيم الحرجة ومناطق الرفض والقبول في الاختبارات المتعلقة بمتوسط واحد

طبيعة الاختبار	القيم الحرجة	مناطق الرفض والقبول
اختبار من جهتين	- في حالة توزيع طبيعي: $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ و $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - في حالة توزيع ستودنت: $-t_{1-\frac{\alpha}{2},v}$ و $t_{1-\frac{\alpha}{2},v}$	
اختبار من جهة اليمين	- في حالة توزيع طبيعي: $Z_{1-\alpha}$ - في حالة توزيع ستودنت: $t_{1-\alpha,v}$	
اختبار من جهة اليسار	- في حالة توزيع طبيعي: $-Z_{1-\alpha}$ - في حالة توزيع ستودنت: $-t_{1-\alpha,v}$	

وكمثال عند القيم الحرجة باستخدام التوزيع الطبيعي الموافقة لمستويات الثقة الشهيرة :

الجدول رقم (03): القيم الحرجة الموافقة لبعض مستويات المعنوية الشهيرة.

مستوى المعنوية			نوع الاختبار
$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	
$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \pm 1.645$	$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \pm 1.96$	$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \pm 2.58$	اختبار من جهتين $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$Z_{\alpha} = \pm 1.28$	$Z_{\alpha} = \pm 1.645$	$Z_{\alpha} = \pm 2.33$	اختبار من جهة واحدة Z_{α}

4. اتخاذ القرار: يتم اتخاذ القرار بشأن رفض الفرضية الصفرية أو قبولها في ضوء القاعدة التالية:

الجدول رقم (04): قاعدة القرار لرفض الفرضية الصفرية في الاختبارات المتعلقة بمتوسط واحد

الاختبار	قاعدة القرار	القرار
الاختبار من جهتين	$ Z_{cal} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ أو $ t_{cal} > t_{1-\frac{\alpha}{2},v}$	رفض H_0
	فيما عدا ذلك	قبول H_0
الاختبار من جهة اليمين	$Z_{cal} > Z_{1-\alpha}$ أو $t_{cal} > t_{1-\alpha,v}$	رفض H_0
	فيما عدا ذلك	قبول H_0
الاختبار من جهة اليسار	$Z_{cal} < -Z_{1-\alpha}$ أو $t_{cal} < -t_{1-\alpha,v}$	رفض H_0
	فيما عدا ذلك	قبول H_0

مثال (01): اختبار الفرضيات المتعلقة بالمتوسط في حالة معلومية تباين المجتمع

في أحد المصانع لصناعة الحبال، قوة مقاومة الحبال للقطع هو متغير طبيعي بمتوسط 1800 وانحراف معياري 100. اعتمد المصنع طريقة جديدة للتصنيع ويدّعي أن قوة مقاومة الحبال للقطع سوف تزداد، ولاختبار هذا الادعاء أخذت عينة من 50 حبالاً، فظهر أن متوسط مقاومتها للقطع هو 1850. المطلوب: هل تؤيد إدعاء المصنع عند مستوى معنوية 0.01.

الحل:

لدينا المعطيات: $\mu_0 = 1800$ ، $\sigma_x = 100$ ، $n = 50$ ، $\bar{x} = 1850$ ، $\alpha = 0.01$

1. صياغة الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 1800 \\ H_1: \mu > 1800 \end{cases}$$

2. احصاء الاختبار: بما أن σ_x معلوم فإن إحصاء الاختبار تأخذ الشكل

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

ومنه: يمكن حساب قيمة إحصاء الاختبار كالتالي:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} = \frac{1850 - 1800}{\frac{100}{\sqrt{50}}} = 3.54 \Rightarrow Z_{cal} = 3.54$$

المحاضرة رقم (13): اختبار الفرضيات المتعلقة بمتوسط مجتمع واحد

3. تحديد القيمة الحرجة: بما أن الاختبار من جهة واحدة فإن القيمة الحرجة هي قيمة Z الموافقة لاحتمال

$$\alpha = 0.01, \text{ ومن جدول التوزيع الطبيعي نجد: } Z_{1-\alpha} = 2.33$$

4. اتخاذ القرار: بما أن الاختبار من جهة اليمين فإن قاعدة القرار تقضي برفض H_0 إذا كانت القيمة

المحسوبة Z_{cal} أكبر من القيمة الجدولية $Z_{1-\alpha}$. ومن خلال نتائج الخطوتين 2 و 3 نلاحظ أن $3.54 >$

2.33 أي أن: $Z_{cal} > Z_{\alpha}$ ومنه نرفض H_0 أي أن الادعاء صحيح ويجب تأييده.

مثال (02): اختبار الفرضيات المتعلقة بالمتوسط في حالة مجهولية تباين المجتمع و $n < 30$

زمن تجميع الأجزاء المختلفة لوحدة واحدة من منتج معين في إحدى الورشات من طرف عمال التنفيذ

يشكل متغير طبيعي بمتوسط 50 دقيقة. لكن المهندس يرى أن زمن التجميع يختلف عن 50 دقيقة، وللتأكد

من ذلك اختار عشوائياً عينة من 10 عمال فأظهرت أن متوسط زمن التركيب هو 51.7 دقيقة بانحراف

معياري 6.3 دقيقة. المطلوب:

- اختبر صحة رأي المهندس عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

لدينا المعطيات: $\mu_0 = 50$ ، $n = 10$ ، $\bar{x} = 51.7$ ، $s = 6.3$ ، $\alpha = 0.05$

1. صياغة الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 50 \\ H_1: \mu \neq 50 \end{cases}$$

2. احصاء الاختبار: بما أن σ_x مجهول و $n < 30$ فإن إحصاء الاختبار تأخذ الشكل :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim T_{\alpha, v}$$

ومنه يمكن حساب قيمة إحصاء الاختبار كالتالي:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{51.7 - 50}{\frac{6.3}{\sqrt{10}}} = 0.85 \Rightarrow t_{cal} = 0.85$$

3. تحديد القيمة الحرجة: بما أن الاختبار من جهة جهتين فسيكون هناك قيمتين حرجتين، وهما قيمتي t

الموافقة لاحتمال $0.025 = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ودرجة الحرية $v = 9$. ومن جدول توزيع ستودنت نستخرج القيم

نجد:

$$\begin{cases} t_{1-\frac{\alpha}{2}, v} = t_{0.975, 9} = +2.262 \\ -t_{1-\frac{\alpha}{2}, v} = -t_{0.975, 9} = -2.262 \end{cases}$$

المحاضرة رقم (13): اختبار الفرضيات المتعلقة بمتوسط مجتمع واحد

4. اتخاذ القرار: بما أن الاختبار من جهتين فإن قاعدة القرار تقضي برفض H_0 إذا كانت القيمة المطلقة لإحصاء الاختبار المحسوبة أكبر من قيمتها الجدولية، أي: $|t_{cal}| > t_{1-\frac{\alpha}{2}, v}$. ومن خلال نتائج الخطوتين 2 و 3 نلاحظ أن $2.262 \neq 0.85$ ، ومنه نقبل الفرضية الصفرية.

مثال (02): اختبار الفرضيات المتعلقة بالمتوسط في حالة مجهولية تباين المجتمع و $n < 30$

تخضع أوزان العجول في إحدى المزارع للتوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 150 كغ، بدأ صاحب المزرعة باستعمال نوع جديد من الأعلاف الذي يتوقع أن يؤدي إلى زيادة وزن العجول، ولاختبار ذلك اختار عشوائياً 64 عجلاً فوجد أن متوسط الوزن هو 156 كغ بانحراف معياري 12 كغ. المطلوب:

- هل تؤيد صاحب المزرعة في أن الأعلاف الجديدة أدت إلى زيادة الأوزان عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

لدينا المعطيات: $\mu_0 = 150$ ، $n = 64$ ، $\bar{x} = 156$ ، $s = 12$ ، $\alpha = 0.05$

1. صياغة الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 150 \\ H_1: \mu > 150 \end{cases}$$

2. إحصاء الاختبار: بما أن σ_x مجهول والعينة كبيرة فإن إحصاء الاختبار :

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0.1)$$

ومنه يمكن حساب قيمة إحصاء الاختبار كالتالي:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{156 - 150}{\frac{12}{\sqrt{64}}} = 4 \Rightarrow Z_{cal} = 4$$

3. تحديد القيمة الحرجة: بما أن الاختبار من جهة واحدة فإن القيمة الحرجة هي قيمة Z الموافقة للاحتمال

$$\alpha = 0.05, \text{ ومن جدول التوزيع الطبيعي نجد: } Z_{0.95} = 1.645$$

4. اتخاذ القرار: بما أن الاختبار من جهة اليمين فإن قاعدة القرار تقضي برفض H_0 إذا كانت القيمة

المحسوبة Z_{cal} أكبر من القيمة الجدولية Z_{α} . ومن خلال نتائج الخطوتين 2 و 3 نلاحظ أن

$4 > 1.645$ أي أن: $Z_{cal} > Z_{1-\alpha}$ ومنه نرفض الفرضية الصفرية ونقبل الفرضية البديلة، أي أن

الأعلاف الجديدة فعلاً تؤدي إلى زيادة وزن العجول.