

المحاضرة رقم (14): اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة في مجتمع واحد

هناك بعض الظواهر التي لا يمكن قياسها ولكن يمكن تقدير نسبة وقوعها، في هذه الحالة لا نقوم باختبار الفرضية حول المتوسط بل حول نسبة وقوع هذه الظاهرة.

أولاً: خطوات اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة

يمكن تلخيص خطوات اختبار الفرضيات حول النسبة في النقاط التالية:

1. صياغة الفرضيات: نأخذ الفرضية الصفرية والبدلية إحدى الحالات التالية حسب طبيعة الاختبار:

الجدول رقم (01): صيغ الفرضية الصفرية والبدلية في اختبارات النسبة

طبيعة الاختبار	صيغة الفرضية الصفرية والبدلية
الاختبار من جهتين	$\begin{cases} H_0: P = p \\ H_1: P \neq p \end{cases}$
الاختبار من جهة واحدة	جهة اليمين $\begin{cases} H_0: P = p \\ H_1: P > p \end{cases}$
	جهة اليسار $\begin{cases} H_0: P = p \\ H_1: P < p \end{cases}$

بحيث: p : تمثل نسبة فرضية.

2. اختيار إحصاء الاختبار: نعلم من خلال دراستنا لتوزيعات المعاينة أن توزيع المعاينة لنسبة حدوث

ظاهرة معينة في العينة p_0 هو التوزيع الطبيعي $(\sqrt{\frac{p \times q}{n}})$ $p_0 \sim \mathcal{N}(\mu_{p_0} = P, \sigma_{p_0} = \sqrt{\frac{p \times q}{n}})$ ومنه

فإحصاء الاختبار هنا هي:

$$Z = \frac{p_0 - p}{\sqrt{\frac{p \times q}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

3. تحديد القيمة أو القيم الحرجة ومناطق الرفض والقبول: تستخرج من جدول التوزيع الطبيعي، وهي عبارة

عن قيمة Z الموافقة للاحتمال α (أو $1 - \alpha$) إذا كان الاختبار من جهة واحدة (جهة اليمين أو

اليسار) أو الموافقة للاحتمال $\frac{\alpha}{2}$ (أو $1 - \frac{\alpha}{2}$) إذا كان الاختبار من جهتين. وبناء على القيم الحرجة يتم

تحديد مناطق الرفض والقبول كالتالي:

الجدول رقم (02): القيم الحرجة ومناطق الرفض والقبول في الاختبارات المتعلقة بالنسبة

طبيعة الاختبار	القيم الحرجة	مناطق الرفض والقبول
الاختبار من جهتين	- قيمتين حرجتين هما: $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ و $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	
اختبار من جهة اليمين	- قيمة حرجة واحدة هي: $Z_{1-\alpha}$	
اختبار من جهة اليسار	- قيمة حرجة واحدة هي: $-Z_{1-\alpha}$	

4. اتخاذ القرار: يتم رفض الفرضية الصفرية إذا وقعت في مناطق الرفض الموضحة في الجدول السابق،

حيث يتم رفض H_0 من خلال مقارنة قيمة إحصاء الاختبار مع القيمة الحرجة (الجدولية) وفق قاعدة

القرار التالية:

- قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة $Z_{1-\alpha}$ الجدولية في حالة الاختبار جهة اليمين أي:

$$Z_{cal} > Z_{1-\alpha}$$

المحاضرة رقم (14): اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة في مجتمع واحد

- قيمة Z المحسوبة أصغر من قيمة $-Z_{1-\alpha}$ الجدولية في حالة الاختبار جهة اليسار أي

$$Z_{cal} < -Z_{1-\alpha}$$
- القيمة المطلقة لقيمة Z المحسوبة أكبر من القيمة الحرجة $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ في حالة الاختبار من جهتين أي:

$$|Z_{cal}| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

مثال:

في إحدى المدارس الخاصة نسبة النجاح في الامتحان الانتقالي إلى المستوى الأعلى تبلغ 72%، وفي إطار سعيها لتحسين النتائج اعتمد مسؤولي المدرسة نظم تعليمية جديدة، وكانت النتيجة بعد هذه الإصلاحات هو نجاح 800 طالب من أصل 1000 تقدموا للامتحان الانتقالي. حيث صرح المسؤول عن المدرسة أن نسبة النجاح قد تحسنت بعد هذه الإصلاحات. المطلوب:

- هل تؤيد هذا التصريح عند مستوى معنوية 5%؟

الحل:

لدينا المعطيات: $p = 0.72$ ، $n = 1000$ ، $\hat{p} = 0.8$ ، $\alpha = 0.05$

1. صياغة الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0: P = 0.72 \\ H_1: P > 0.72 \end{cases}$$

2. احصاء الاختبار: إحصاء الاختبار هي

$$Z = \frac{p_0 - p}{\sqrt{\frac{p \times q}{n}}} \sim \mathcal{N}(0.1)$$

ومنه يمكن حساب قيمة إحصاء الاختبار كالتالي:

- يجب أولاً إيجاد p_0 و q :

$$q + p = 1 \Rightarrow q = 1 - p = 1 - 0.72 \Rightarrow q = 0.28$$

$$p_0 = \frac{\hat{p}}{n} = \frac{800}{1000} = 0.8.$$

- بالتعويض نجد:

$$Z = \frac{p_0 - p}{\sqrt{\frac{p \times q}{n}}} = \frac{0.8 - 0.72}{\sqrt{\frac{0.72 \times 0.28}{1000}}} = 5.63 \Rightarrow Z_{cal} = 5.63$$

المحاضرة رقم (14): اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة في مجتمع واحد

3. تحديد القيمة الحرجة: بما أن الاختبار من جهة واحدة فإن القيمة الحرجة هي قيمة Z الموافقة لاحتمال

$$\alpha = 0.05, \text{ ومن جدول التوزيع الطبيعي نجد: } Z_{0.05} = 1.645.$$

4. اتخاذ القرار: بما أن الاختبار من جهة اليمين فإن قاعدة القرار تقضي برفض H_0 إذا كانت القيمة

المحسوبة Z_{cal} أكبر من القيمة الجدولية Z_α . ومن خلال نتائج الخطوتين 2 و 3 نلاحظ أن

$5.63 > 1.645$ أي أن: $Z_{cal} > Z_\alpha$ ومنه نرفض الفرضية الصفرية . أي أن الاصلاحات المعتمدة

أدت فعلا إلى تحسين النتائج وتصريح المسؤول صحيح.