

أولاً: خطوات اختبار الفرضيات المتعلقة بتباين مجتمع واحد

يتم اختبار الفرضيات حول تباين مجتمع واحد باتباع الخطوات التالية:

1. صياغة الفرضيات:

الجدول رقم (01): صيغ الفرضية الصفرية والبديلة في اختبارات التباين

طبيعة الاختبار	صيغة الفرضية الصفرية والبديلة
الاختبار من جهتين	$\begin{cases} H_0: \sigma_x^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$
الاختبار من جهة واحدة	جهة اليمين $\begin{cases} H_0: \sigma_x^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma_x^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$
	جهة اليسار $\begin{cases} H_0: \sigma_x^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma_x^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$

2. إحصاءة الاختبار: رأينا في الفصل الثاني أنه إذا سحبنا عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي

$\mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ تباينه σ_x^2 معلوم، وكان $\hat{s}^2$ هو تباين (التباين المعدل) لهذه العينة فإن المقدار

$$\frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma_x^2} \text{ هو متغير عشوائي يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية } v = n - 1.$$

ومنه فإن إحصاءة الاختبار هي :

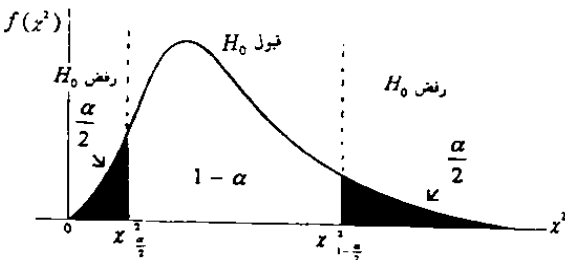
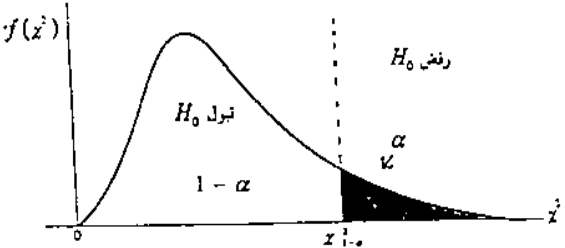
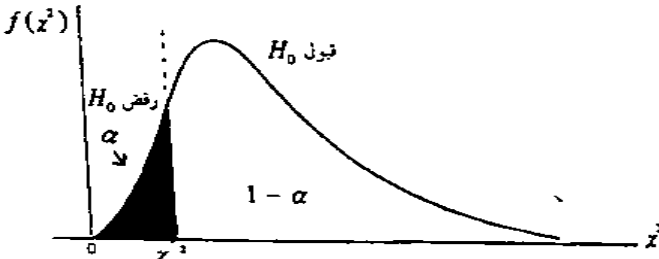
$$\chi^2 = \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{\alpha, v}^2$$

3. تحديد القيم الحرجة ومناطق الرفض والقبول: تتمثل القيم الحرجة في قيم χ^2 الموافقة للاحتمالات

α أو $\frac{\alpha}{2}$ أو $1 - \frac{\alpha}{2}$ وذلك حسب طبيعة الاختبار (من جهتين، من جهة اليمين أو جهة اليسار) وبناء

على هذه القيم الحرجة يتم تحديد مناطق الرفض والقبول كالتالي:

الجدول رقم (02): القيم الحرجة ومناطق الرفض والقبول في الاختبارات المتعلقة بالتباين

طبيعة الاختبار	القيم الحرجة	مناطق الرفض والقبول
من جهتين	$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},v}$ ، $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},v}$	
من جهة اليمين	$\chi^2_{1-\alpha,v}$	
من جهة اليسار	$\chi^2_{\alpha,v}$	

4. اتخاذ القرار: يتم اتخاذ قرار رفض فرضية العدم H_0 كما هو موضح في مناطق الرفض والقبول أعلاه

من خلال مقارنة قيمة إحصاء الاختبار المحسوبة مع القيمة (أو القيم الحرجة)، وفق قاعدة القرار التالية:

- إذا كانت قيمة إحصاء الاختبار المحسوبة χ^2_{cal} أكبر من القيمة الحرجة $\chi^2_{1-\alpha,v}$ في حالة الاختبار من جهة اليمين أي $\chi^2_{cal} > \chi^2_{1-\alpha,v}$ ؛
- إذا كانت قيمة إحصاء الاختبار المحسوبة χ^2_{cal} أصغر من القيمة الحرجة $\chi^2_{\alpha,v}$ في حالة الاختبار من جهة اليسار أي: $\chi^2_{cal} < \chi^2_{\alpha,v}$ ؛
- إذا كانت: $\chi^2_{cal} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},v}$ أو $\chi^2_{cal} > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},v}$ في حالة الاختبار من جهتين.

مثال:

آلة لصناعة كريات حديدية بقطر معطى، والتباين المصرح به من طرف صاحب الآلة هو 4.5 mm.

سُحبت عينة مكونة من 31 كرية فأظهرت تباين قدره 7.2 mm. المطلوب:

- هل هذا الاختلاف في التباين معنوي عند مستوى 5%؟

الحل:

لدينا المعطيات: $\hat{s}^2 = 7.2$ ، $\sigma_0^2 = 4.5$ ، $n = 31$.

1. صياغة الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_x^2 = 4.5 \\ H_1: \sigma_x^2 \neq 4.5 \end{cases}$$

- إحصاء الاختبار: إحصاء الاختبار هي :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{\alpha, v}^2$$

وبحساب قيمة إحصاء الاختبار نجد:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma_0^2} = \frac{(31-1)7.2}{4.5} = 48 \Rightarrow \chi_{cal}^2 = 48$$

- تحديد القيم الحرجة: بما أن الاختبار من جهتين فهناك قيمتان حرجتان هما:

$$\begin{cases} \chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 = \chi_{0.975, 30}^2 = 46.98 \\ \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 = \chi_{0.025, 30}^2 = 16.79 \end{cases}$$

- اتخاذ القرار: بما أن الاختبار من جهتين فإن رفض H_0 يكون عندما تكون: $\chi_{cal}^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}, v}^2$

أو $\chi_{cal}^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}, v}^2$. ومن خلال الخطوتين 2 و 3 نلاحظ أن $48 > 46.98$ أي أن قيمة χ^2

المحسوبة تقع في منطقة رفض الفرضية الصفرية، ومنه يتم رفض H_0 أي أن الاختلاف في التباين

معنوي.