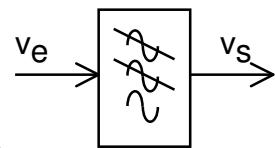
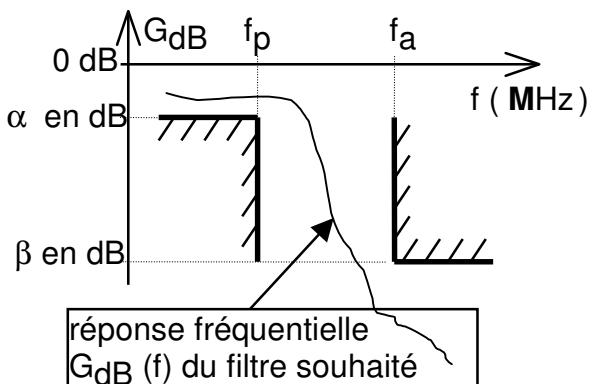


1. Le gabarit d'un filtre passe-bas LP



Le gabarit d'un filtre passe-bas est défini par les valeurs (f_p , α) et (f_a , β) délimitant le domaine où doit s'inscrire la réponse fréquentielle :

$$G_{dB}(f) = 20 \log \frac{V_s}{V_e} \text{ du filtre.}$$

f_p est la fréquence frontière de la bande **passante**.
 f_a est la fréquence frontière de la bande **atténuée**.

2. La normalisation des fréquences, du gabarit et des composants

2.1. la normalisation des fréquences

On choisit **une fréquence de référence f_r** (souvent c'est la fréquence centrale f_0),

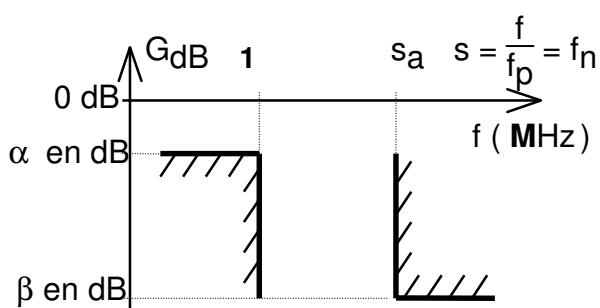
d'où **la fréquence normalisée $f_n = \frac{f}{f_r}$** .

La pulsation normalisée correspond à la même valeur $f_n = \frac{f}{f_r} = \frac{2\pi f}{2\pi f_r} = \frac{\omega}{\omega_r}$.

Si on pose que $s = \frac{j\omega}{\omega_r}$, le module de s est $|s| = \frac{\omega}{\omega_r} = \frac{f}{f_r} = f_n$.

Nous utiliserons cette **notation symbolique s** qui correspond aussi à la **variable de Laplace normalisée $s = \frac{p}{\omega_r}$** , la variable de Laplace correspondant en régime harmonique à $j\omega$.

2.2. la normalisation du gabarit



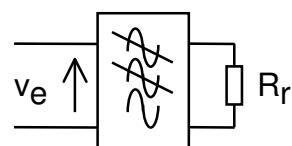
le gabarit normalisé est obtenu en choisissant comme fréquence de référence $f_r = f_p$ la fréquence frontière de la bande **passante** : f_p
 devient $s = \frac{f}{f_p} = \frac{f_p}{f_p} = 1$

$$f_a \text{ devient } s_a = \frac{f_a}{f_p}$$

2.3. la normalisation des composants

La fréquence de **référence $f_r = f_p$** étant choisie, on choisit en plus une **résistance de référence R_r** .

- Pour les filtres passifs, R_r correspond habituellement à la résistance de charge du filtre, comme le représente la figure ci-contre.
- Pour les filtres actifs à amplificateur opérationnel R_r correspond à la résistance du montage la plus fréquente (exemple : 10 kΩ).



D'où **la résistance normalisée** $R_n = \frac{R}{R_r}$. On utilisera aussi la relation $R = R_n \cdot R_r$.

D'où **l'inductance de référence** $L_r = \frac{R_r}{\omega_r}$ et **l'inductance normalisée** $L_n = \frac{L}{L_r} \rightarrow L = L_n \cdot L_r$.

D'où **la capacité de référence** $C_r = \frac{1}{R_r \cdot \omega_r}$ et **la capacité normalisée** $C_n = \frac{C}{C_r} \rightarrow C = C_n \cdot C_r$.

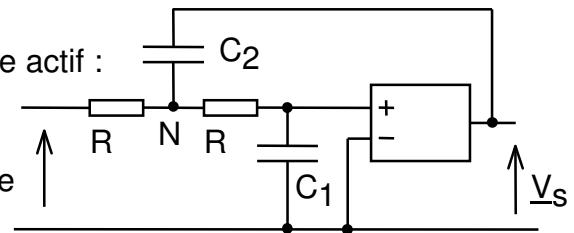
D'où **les impédances symboliques** R_n , L_n et $\frac{1}{C_n}$.

2.3. exemple de circuit normalisé :

Cherchons d'abord **la fonction de transfert** de ce filtre actif :

au noeud N, la somme des courants est nulle, donc

$$\text{devient } \frac{\underline{V}_e - \underline{V}_N}{R} + \frac{\underline{V}_s - \underline{V}_N}{1/jC_2\omega} + \frac{\underline{V}_s - \underline{V}_N}{R} = 0.$$



Multiplions par R , il vient : $(\underline{V}_e - \underline{V}_N) + jRC_2\omega(\underline{V}_s - \underline{V}_N) + (\underline{V}_s - \underline{V}_N) = 0$.

Mettons \underline{V}_N en facteur et dans l'autre membre de l'égalité :

$$\underline{V}_e + jRC_2\omega\underline{V}_s + \underline{V}_s = \underline{V}_N + jRC_2\omega\underline{V}_N + \underline{V}_N = \underline{V}_N(2 + jRC_2\omega) \quad (1)$$

Une relation supplémentaire donnant \underline{V}_N est obtenue avec R et C1 qui forment un pont diviseur

$$\underline{V}_s = \underline{V}_N \cdot \frac{1/jC_1\omega}{1/jC_1\omega + R} = \underline{V}_N \cdot \frac{1}{1 + jRC_1\omega} \text{ d'où } \underline{V}_N = \underline{V}_s \cdot (1 + jRC_1\omega) \quad (2)$$

Alors (1) et (2) donne $\underline{V}_e + jRC_2\omega\underline{V}_s + \underline{V}_s = \underline{V}_s \cdot (1 + jRC_1\omega) \cdot (2 + jRC_2\omega)$,

$$\text{puis } \underline{V}_e = \underline{V}_s \cdot ((1 + jRC_1\omega) \cdot (2 + jRC_2\omega) - jRC_2\omega - 1).$$

$$\begin{aligned} \text{Développons : } \underline{V}_e &= \underline{V}_s \cdot (2 + j2RC_1\omega + jRC_2\omega + j^2R^2C_1C_2\omega^2 - jRC_2\omega - 1) \\ &= \underline{V}_s \cdot (1 + j2RC_1\omega + j^2R^2C_1C_2\omega^2). \end{aligned}$$

Finalement on a $T(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{1}{1 + 2RC_1(j\omega) + R^2C_1C_2(j\omega)^2}$. C'est l'expression d'un passe-bas

du deuxième ordre dont on déduit facilement $\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$ et $m = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$.

Normalisons le circuit :

Choisissons comme pulsation de référence $\omega_r = \omega_0$ et comme résistance de référence $R_r = R$.

Les impédances symboliques valent alors

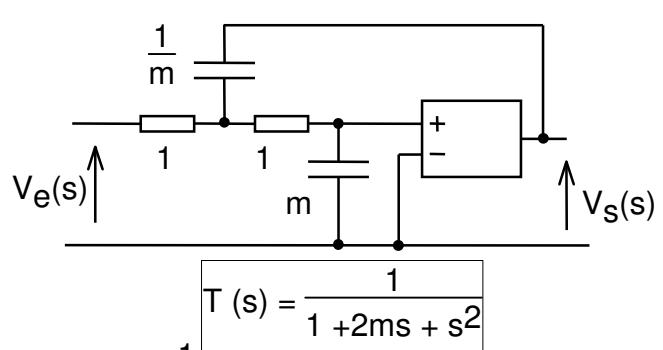
$$\Rightarrow R_n = \frac{R}{R_r} = \frac{R}{R} = 1,$$

$$\Rightarrow \text{pour } C_1, \quad C_{1n} = \frac{C_1}{C_r}$$

$$\text{et comme } C_r = \frac{1}{R_r \cdot \omega_r} = \frac{1}{R \cdot \omega_0} = \frac{1}{R \cdot \sqrt{C_1 C_2}},$$

il vient $C_{1n} = m$,

$$\Rightarrow \text{pour } C_2, \quad C_{2n} = \frac{C_2}{C_r} \text{ et comme } C_r = \sqrt{C_1 C_2}, \text{ il vient } C_{2n} = \frac{1}{m}.$$



Connaissant maintenant le circuit normalisé du passe-bas du deuxième ordre de

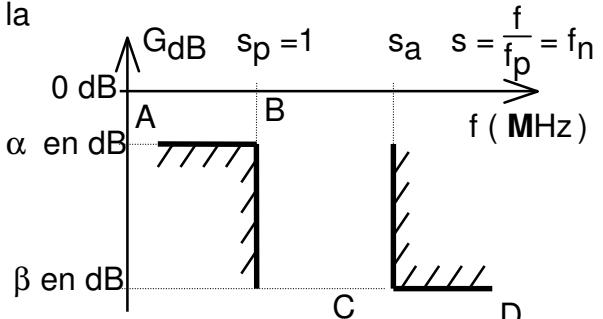
transmittance symbolique : $T(s) = \frac{1}{1 + 2ms + s^2}$, on peut calculer les capacités C_1 et C_2

après avoir choisi R , pour obtenir le filtre de fréquence de cassure $\omega_0 = \omega_r$ souhaité.

3. Les différentes formes de réponses

On détermine la fonction de transfert $T(j\omega)$ telle que la courbe s'inscrive dans le gabarit normalisé.

Les conditions sur la fonction recherchée sont sur le segment AB : $20 \log T(s) \geq \alpha$ pour $s \leq s_p = 1$, α en dB
sur le segment CD : $20 \log T(s) \leq \beta$ pour $s \geq s_a$,
en B : $20 \log T(1) \geq \alpha$ donc $T(1) \geq 10^{\alpha/20}$.



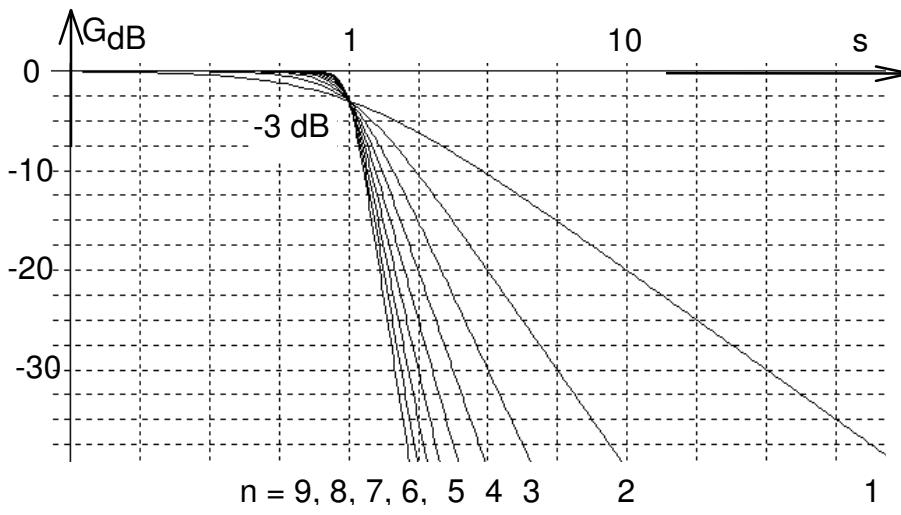
Les approximations possibles sont les fonctions de Butterworth, de Chebychev, de Bessel entre autres .

3.1. la réponse de Butterworth ou courbe MFn pour "maximally flat" d'ordre n

courbe ainsi appelée car elle a comme propriété d'être plate dans la partie AB.

Les réponses de Butterworth ont comme fonctions de transfert $T(j\omega)$ telles que leurs modules

s'écrivent sous la forme
$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + s^{2n}}} \text{ où } n \text{ est l'ordre du filtre}$$
.



Le gain vaut alors :
 $G_dB = -10 \log(1 + s^{2n})$.

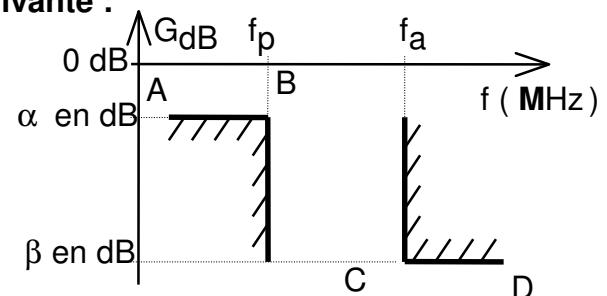
Si $s = 1$ on a toujours
 $G_dB = -10 \log(1 + 1)$
 $= -10 \log 2 = -3 \text{ dB}$.

Rappel : les courbes du gain
 $G_dB = 20 \log |T(s)|$
ci-contre ont bien sûr des échelles semi-logarithmiques (un module correspond à 4 divisions)

Problème posé : il faut trouver le montage à réaliser connaissant le gabarit on procède de la façon suivante :

a) dans un premier temps, d'après le gabarit, on détermine l'**ordre n du filtre**.

La réponse de Butterworth donne à f_p un gain $G_dB = -3 \text{ dB}$, mais cherchons l'ordre du filtre d'après un gabarit quelconque (f_p, α) et (f_a, β).



Les conditions sur la fonction recherchée sont sur le segment AB :

$20 \log T(s_p) \geq \alpha$ et sur le segment CD : $20 \log T(s_a) \leq \beta$.

Si $20 \log T(s_p) \geq \alpha$, $-10 \log (1 + s_p^{2n}) \geq \alpha$, ce qui donne $(1 + s_p^{2n}) \leq 10^{-\alpha} / 10$,
puis $s_p^{2n} \leq (10^{-\alpha} / 10 - 1)$.

De la même façon comme $20 \log T(s_a) \leq \beta$, $s_a^{2n} \geq (10^{-\beta} / 10 - 1)$.

Le produit $s_a^{2n} \cdot (10^{-\alpha} / 10 - 1)$ est donc supérieur ou égal au produit $s_p^{2n} \cdot (10^{-\beta} / 10 - 1)$.

On en déduit l'inégalité suivante : $s_a^{2n} / s_p^{2n} \geq (10^{-\beta} / 10 - 1) / (10^{-\alpha} / 10 - 1)$ dont on extrait n en prenant le logarithme décimal de chacun des membres de l'inégalité : $\log s_a^{2n} / s_p^{2n} = 2n \log f_a / f_p$ donne

$$n \geq \frac{\log [(10^{-\beta} / 10 - 1) / (10^{-\alpha} / 10 - 1)]}{2 \log (f_a / f_p)}$$

on choisit l'entier n supérieur comme ordre du filtre ayant une réponse de Butterworth

b) Ensuite $T(s)$ est trouvé grâce au tableau donnant les différents dénominateurs des fonctions de Butterworth appelés **polynômes de Butterworth** $\frac{1}{T(s)}$:

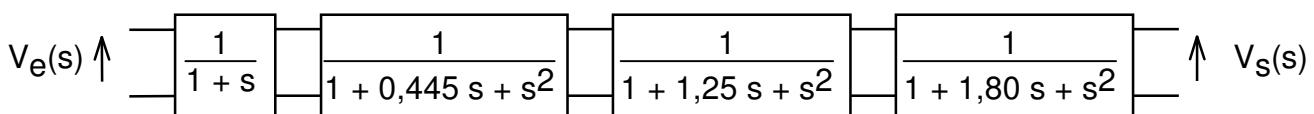
Rappel : $T(s)$ est la fonction de transfert du filtre, $s = \frac{j\omega}{\omega_r}$ est la variable de Laplace normalisée,

n est l'ordre du filtre, et m le coefficient d'amortissement des second ordres associés à $T(s)$

n	Polynômes de Butterworth	m
1	$1 + s$	
2	$1 + \sqrt{2} s + s^2$	0,707
3	$(1 + s)(1 + s + s^2)$	0,5
4	$(1 + 0,765 s + s^2)(1 + 1,848 s + s^2)$	0,383 - 0,924
5	$(1 + s)(1 + 0,618 s + s^2)(1 + 1,618 s + s^2)$	0,309 - 0,809
6	$(1 + 0,518 s + s^2)(1 + \sqrt{2} s + s^2)(1 + 1,93 s + s^2)$	0,259 - 0,707 - 0,966
7	$(1 + s)(1 + 0,445 s + s^2)(1 + 1,25 s + s^2)(1 + 1,80 s + s^2)$	0,222 - 0,623 - 0,901
8	$(1 + 0,390 s + s^2)(1 + 1,11 s + s^2)(1 + 1,67 s + s^2)(1 + 1,96 s + s^2)$	0,195 - 0,555 - 0,835 - 0,980

c) le montage est réalisé en associant en cascade des filtres passe-bas du premier et du second ordre dont on connaît la représentation normalisée (voir le montage en 2.3.).

Par exemple, si l'ordre souhaité est 7 :



3.2. la réponses de Chebychev (ou Tchebytcheff) appelés ERn

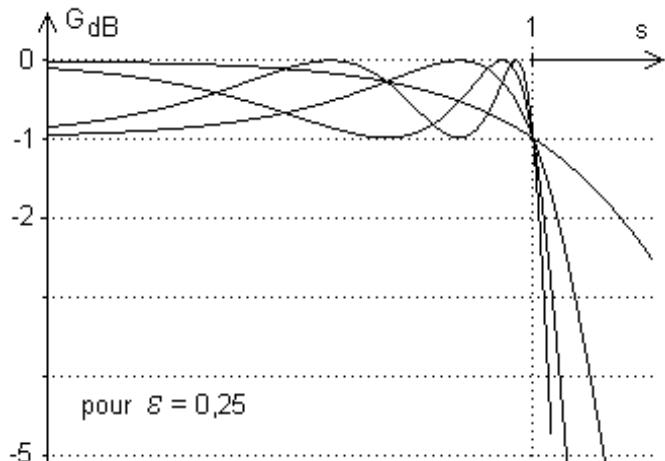
pour "equal ripple" qui signifie :
"égales ondulations dans la bande passante que l'ordre n".

Elles ont la propriété d'avoir avant la coupure, des ondulations ayant autant de maximums que l'ordre n du filtre.

La fonction $T(s)$ est telle que son module vaut

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 C_n(s)^2}}$$

où n est l'ordre du filtre et ϵ est un nombre réel et $C_n(s)$ un polynôme défini par récurrence et vérifiant $C_0(s) = 1$, $C_1(s) = s$ et $C_{n+1}(s) = 2sC_n(s) - C_{n-1}(s)$.



Ce qui donne $C_2(s) = 2s^2 - 1$, $C_3(s) = 4s^3 - 3s$,
 $C_4(s) = 8s^4 - 8s^2 + 1$, $C_5(s) = 16s^5 - 20s^3 + 5s$, ...

- pour $s = 1$, le gain est toujours de $G_{dB} = -10 \log(1+\epsilon^2)$ et en particulier - 1 dB pour $\epsilon = 0,5$,
- pour $s < 1$, si on pose $s = \cos \varphi$, on vérifie que $C_n(s) = \cos n\varphi$,
la courbe oscille entre 0 et $-10 \log(1+\epsilon^2)$,
- pour $s > 1$, la courbe du gain admet une asymptote de pente - 20 n dB / décade ou - 6 n dB / octave.

La méthode pour déterminer un filtre à partir d'un gabarit est identique à celle développée avec une fonction de Butterworth : d'abord déterminer l'ordre n, puis à l'aide de tableaux trouvés dans les manuels spécialisés, déterminer les valeurs de m, puis calculer les valeurs des composants.

3.4. les fonctions de Bessel réalisent des filtres à phase linéaire

Pour ces filtres, ce n'est pas la réponse harmonique que l'on cherche à optimiser mais les **réponses indicielle et impulsionnelle**. En effet, les trois fonctions MF, ER et O dénaturent les fronts raides en les affectant d'un retard et en leur superposant des oscillations. Pour remédier à ces inconvénients, on est amené à étudier des réseaux dont la qualité principale est de faire varier linéairement le déphasage introduit.

$T(s) = \frac{1}{B_n(s)}$ où le polynôme de Bessel $B_n(s)$ s'obtient par récurrence :

$B_0 = 1$ et $B_1 = 1 + s$ d'où les polynômes $B_n = (2n - 1) B_{n-1} + s^2 B_{n-2})$

ce qui donne :	ordre	B_n
	1	$1 + s$
	2	$3 + 3s + s^2$
	3	$15 + 15s + 6s^2 + s^3 = (2,325 + s).(6,456 + 3,675s + s^2)$
	4	$105 + 105s + 45s^2 + 10s^3 + s^4 = (9,140 + 5,792s + s^2).(11,49 + 4,208s + s^2)$
	...	

4. La transformation passe-bas → passe-haut

Les fonctions de transfert sont toujours données pour des filtres passe-bas.

Pour la synthèse des autres filtres on opère un changement sur la variable symbolique s.

Pour passer d'un passe-bas vers une passe-haut, et inversement, il faut intervertir le rôle des fréquence $s = 0$ et $s = +\infty$, donc faire le changement de variable :

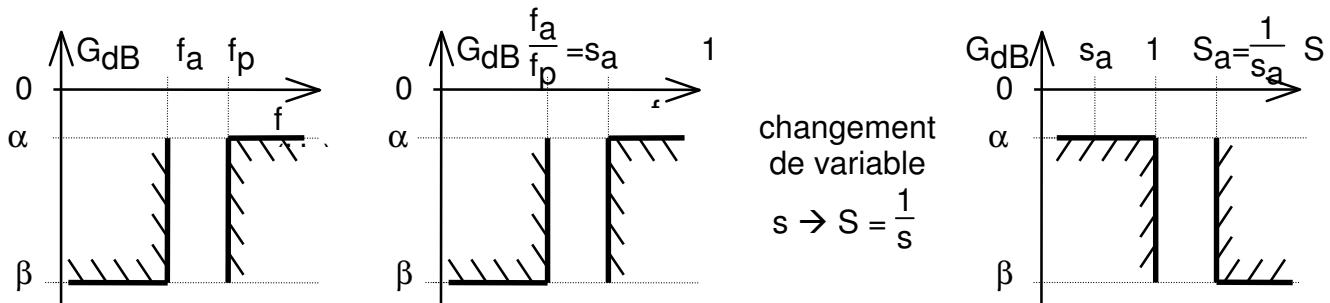
$$s \rightarrow \frac{1}{s}$$

1. trouver le gabarit du passe-bas correspondant

gabarit du passe-haut → gabarit normalisé

→

gabarit du passe-bas



2. trouver l'ordre n du filtre correspondant au passe-bas précédent

Le gabarit du passe-bas permet de déterminer la transmittance $T(s)$ avec les fonctions de Butterworth, Chebychev, ...

3. choisir le filtre normalisé

4. calculer les valeurs normalisées des composants

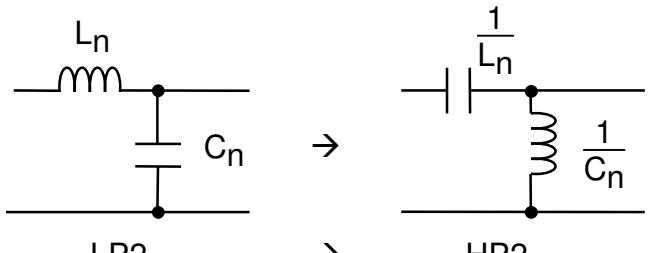
Dans la transformation qui à s fait correspondre $S = \frac{1}{s}$,

une **inductance** normalisée L_n devient une capacité C_n puisque $L_n s = L_n \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{\frac{1}{L_n} s} = \frac{1}{C_n s}$,

une **capacité** normalisée C_n devient une inductance L_n puisque $\frac{1}{C_n s} = \frac{1}{C_n} \frac{1}{s} = \frac{1}{C_n} s = L_n s$,

Par exemple, le filtre passif passe-bas normalisé $L_n C_n$ devient le filtre passif passe-haut normalisé

d'inductance $\frac{1}{C_n}$ et de capacité $\frac{1}{L_n}$



5. calculer les valeurs réelles de C et L

d'après les hypothèses $R_r = R$ et $\omega_r = \omega_0$

calculer L_r et C_r

d'où finalement $L = L_n \cdot L_r$ et $C = C_n \cdot C_r$

$$T(s) = \frac{1}{1 + 2ms + s^2} \rightarrow T(s) = \frac{s^2}{1 + 2ms + s^2}$$

5. La transformation passe-bas passe-bande

5.1. le qabarit

La bande passante $\Delta f = \mathcal{B}_{\text{Hz}} = \frac{f_0}{Q} = 2m f_0$ vaut ici $f_p^+ - f_p^-$.

En divisant par la fréquence centrale f_0 , on obtient

l'expression de la **bande passante relative** ou **la largeur de bande relative** B .

$$B = \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\mathcal{B}_{\text{Hz}}}{f_0} = \frac{f_p^+ - f_p^-}{f_0}.$$

Si on ne connaît pas f_0 , on peut choisir la moyenne géométrique de f_p^- et f_p^+ , $f_0 = \sqrt{f_p^- \cdot f_p^+}$.

Exemple : $f_a^- = 500 \text{ kHz}$, $f_p^- = 2 \text{ MHz}$, $f_p^+ = 8 \text{ MHz}$, $f_a^+ = 16 \text{ MHz}$, $\alpha = -3 \text{ dB}$ et $\beta = -20 \text{ dB}$

$$\text{La fréquence centrale vaut alors } f_0 = \sqrt{2 \times 8} = 4 \text{ MHz et } B = \frac{8 - 2}{4} = 1,5$$

5.2. transformation passe-bande → passe-bas

La forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe bande

$$\text{s'écritait } T(j\omega) = \frac{2m j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2m j \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} \text{ ou encore } \frac{1}{1 + j Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \text{ avec } Q = \frac{1}{2m}$$

Comme $s = \frac{j\omega}{\omega_0}$ et $B = 2m = \frac{1}{Q}$, la forme symbolique normalisée est $T(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{B} \left(s + \frac{1}{s} \right)}$.

L'expression d'un passe-bas du premier ordre est $T(s) = \frac{1}{1 + s}$. C'est ce qui nous incite à faire

le changement de variable suivant : $s \rightarrow \frac{1}{B} \left(S + \frac{1}{S} \right)$.

Cette transformation conduit au changement de variable suivant :

$$s = \frac{f_0}{f_p^+ - f_p^-} \left| \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right| = \frac{|f_2 - f_p^+ \cdot f_p^-|}{(f_p^+ - f_p^-) \cdot f}.$$

Si $f = f_p^-$ ou f_p^+ , on a $s = 1$.

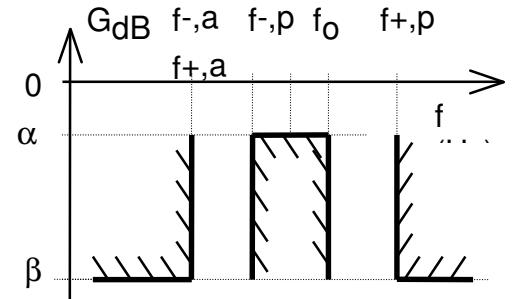
Si $f = f_a^-$ ou f_a^+ , s est supérieur à 1 et sa valeur minimale sera appelée a .

Exemple numérique : f_a^- et f_a^+ ne sont pas symétriques,

on trouve deux valeurs $a = 5,25$ et $a = 2,5$ qu'on retient pour les calculs du filtre recherché.

Les valeurs α et β donnent comme ordre du filtre $n \geq 2,51$. Il s'agit d'un filtre du 3° ordre qu'on peut réaliser sur le modèle d'une fonction de Butterworth :

$$T(s) = \frac{1}{1+2s+2s^2+s^3} = \frac{1}{(1+s)(1+s+s^2)}.$$



5.3. transformation passe-bas → passe-bande

On revient au passe-bande en procédant au changement de variable $s \rightarrow \frac{1}{B} \left(S + \frac{1}{S} \right)$ décrit plus

$$\text{haut : } T(s) = \frac{1}{1 + \frac{2}{B} \left(s + \frac{1}{s} \right) + \frac{2}{B^2} \left(s + \frac{1}{s} \right)^2 + \frac{1}{B^3} \left(s + \frac{1}{s} \right)^3}.$$

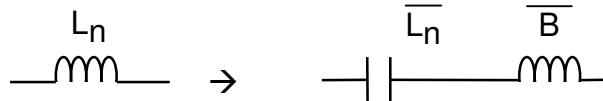
Pour trouver les éléments du montage passe-bande, il suffit de transformer les composants.

L'**inductance** normalisée d'impédance normalisée $L_n s$

devient $\frac{L_n}{B} \left(s + \frac{1}{s} \right) = \frac{L_n}{B} s + \frac{1}{\frac{B}{L_n} \cdot s}$, une inductance $\frac{L_n}{B}$ en

série avec un condensateur de capacité normalisée $\frac{B}{L_n}$.

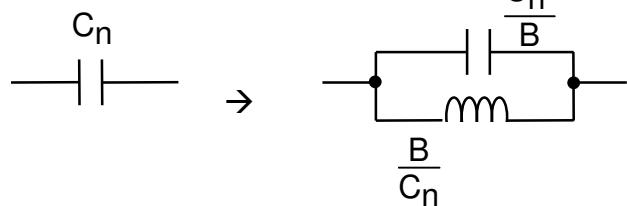
passe-bas → passe-bande
à remplacer par



La capacité normalisée d'admittance normalisée $C_n s$

devient $\frac{C_n}{B} \left(s + \frac{1}{s} \right) = \frac{C_n}{B} s + \frac{1}{\frac{B}{C_n} \cdot s}$, une inductance $\frac{C_n}{B}$

en parallèle avec une capacité normalisée $\frac{B}{C_n}$.



5.4. transformation passe-bas → coupe-bande ou réjecteur (notch)

Cette transformation est obtenue avec le changement de variable $s \rightarrow \frac{B}{s + \frac{1}{s}}$

6. Comparaison entre les filtres actifs, passifs et numériques

6.1. les filtres passifs sont constitués de bobines et d'inductances

- Le facteur de qualité $Q = \frac{L\omega}{R}$ des bobines est mauvais aux faibles fréquences.
- Les valeurs des inductances sont données avec une mauvaise tolérance.
- L'inductance est variable avec la température.
- Un couplage par mutuelle inductance (avec une autre inductance) modifie les performances du filtre.
- La fonction de transfert $T(j\omega)$ dépend de la charge.
- Avantage : les filtres passifs restent les plus **performants aux hautes fréquences** : $f \geq 1 \text{ MHz}$.

6.2. les filtres actifs sont réalisés avec des amplificateurs opérationnels

- Ils sont utilisés à moindre coût jusqu'à 100 kHz.
- Ils nécessitent malheureusement une alimentation symétrique.
- Les amplificateurs opérationnels ont des tensions de saturation.
- Les amplificateurs opérationnels produisent un bruit aux faibles amplitudes.
- Ils ont une mauvaise réponse aux fréquences élevées.
- La contre-réaction des montages peut amener l'instabilité.

6.2. les filtres numériques

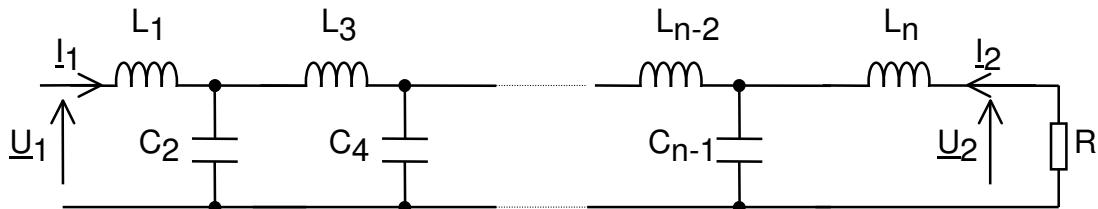
- Ils nécessitent un matériel plus important, convertisseurs numérique-analogique et analogique-numérique, microprocesseur, ..., donc sont plus coûteux.
 - La fréquence d'échantillonage limite les fréquences d'utilisation.
 - Calculs et élaboration complexes
 - Les filtres numériques d'une même série sont parfaitement identiques, précis car lié à la fréquence d'une horloge (plus fidèle qu'une résistance), et fidèle (pas de vieillissement).
 - Ils s'adaptent facilement à toutes les situations.
 - Leur miniaturisation évolue constamment et pourra concurrencer la taille des filtres actifs et passifs.
- Le filtrage numérique sera étudié en deuxième année.*

7. Les filtres passifs LC

7.1. le filtre passe-bas

7.1.1. le filtre en échelle LC

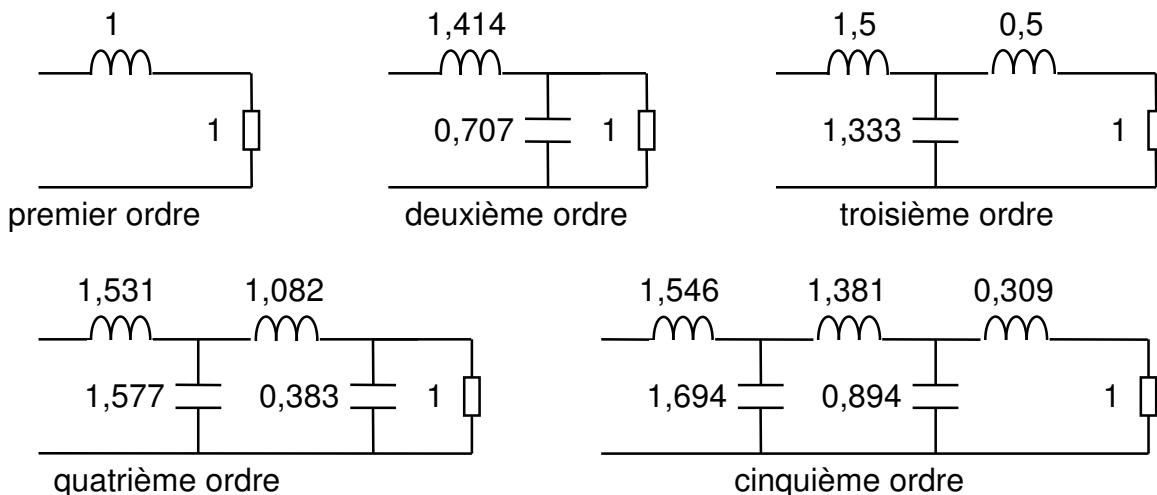
L'ordre n du filtre correspond au nombre de composants, comme l'indique les indices des condensateurs et des inductances.



La valeur de la résistance de référence est la charge R .

7.1.2. détermination des valeurs normalisées : méthode partant de la transmittance normalisée définie d'après le gabarit du passe-bas correspondant et utilisant le paramètre admittance Y_{22} du quadripôle associé.

7.1.3. filtres normalisés d'ordre 1, 2, 3, 4 et 5 pour une réponse de type Butterworth



7.1.4. le filtre passe-haut est obtenu en remplaçant

$$\text{---} \text{L}_n \text{---} \text{ par } \text{---} \frac{1}{\text{L}_n} \text{---} \text{ et } \text{---} \text{C}_n \text{---} \text{ par } \text{---} \frac{1}{\text{C}_n} \text{---}$$

7.1.5. le filtre passe-bande est obtenu en remplaçant

$$\begin{aligned} \text{---} \text{L}_n \text{---} \text{ par } \text{---} \frac{\text{B}}{\text{L}_n} \text{---} \text{ et } \text{---} \text{C}_n \text{---} \text{ par } \text{---} \frac{\text{C}_n}{\text{B}} \text{---} \\ \text{---} \text{L}_n \text{---} \text{ par } \text{---} \frac{\text{L}_n}{\text{B}} \text{---} \text{ et } \text{---} \text{C}_n \text{---} \text{ par } \text{---} \frac{\text{B}}{\text{C}_n} \text{---} \end{aligned}$$

8. Les filtres actifs

8.1. les montages du premier ordre :

voir le chapitre "les quadripôles en régime harmonique"

8.2. les montages du deuxième ordre

8.2.1. montages associant quadripôles passifs et amplificateurs opérationnels

On rappelle la **définition des paramètres admittances** pour un quadripôle Q

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot V_1 + Y_{12} \cdot V_2 \\ I_2 = Y_{21} \cdot V_1 + Y_{22} \cdot V_2 \end{cases} \text{ où les paramètres admittances valent}$$

$Y_{11} = \left(\frac{I_1}{V_1} \right) V_2 = 0$, ce qui signifie : I_1 sur V_1 lorsque V_2 est nul, et de la même façon on a

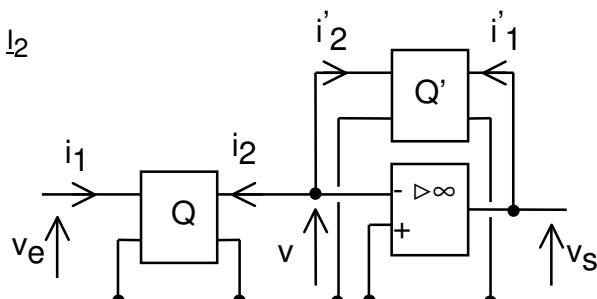
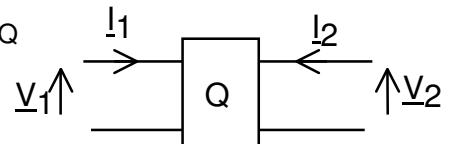
$$Y_{12} = \left(\frac{I_1}{V_2} \right) V_1 = 0, \quad Y_{21} = \left(\frac{I_2}{V_1} \right) V_2 = 0 \quad \text{et} \quad Y_{22} = \left(\frac{I_2}{V_2} \right) V_1 = 0.$$

Le filtre est réalisé par un montage inverseur à amplificateur opérationnel particulier. Les quadripôles Q et Q' sont définis par leurs paramètres admittances \underline{Y} . Pour trouver la fonction de transfert en tension on écrit, sachant qu'en régime de fonctionnement linéaire $\underline{V} = 0$,

$$\begin{cases} I_2 = Y_{21} \cdot V_1 + Y_{22} \cdot V = Y_{21} \cdot V_1 \\ I'_2 = Y'_{21} \cdot V_2 + Y'_{22} \cdot V = Y'_{21} \cdot V_2 \end{cases} \text{ et comme } I'_2 = -I_2$$

on obtient $\underline{I} = \frac{V_2}{V_1} = -\frac{Y_{21}}{Y'_{21}}$

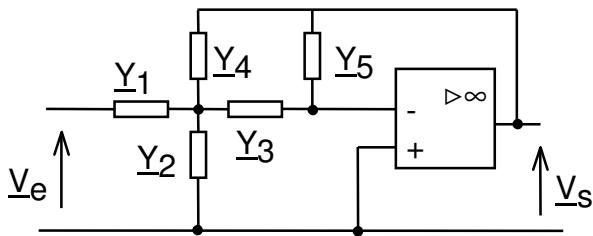
rappelons que $Y_{21} = \left(\frac{I_2}{V_1} \right) V_2 = 0$



filtre du 2° ordre	quadripôle Q	quadripôle Q'	T _{max}	ω ₀	m
passe-bas			-1	$\frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$	$\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$
passe-haut			-1	$\frac{1}{C\sqrt{R_1 R_2}}$	$\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$
passe-bande			$\frac{R_2}{2R_1}$	$\frac{1}{C\sqrt{R_1 R_2}}$	$\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$
réjecteur double T ponté			-1	$\frac{1}{CR}$	0,5

8.2.2. la structure de Rauch

a) Schéma général de ce filtre à boucles multiples



On démontre que

$$T = -\frac{Y_1 \cdot Y_3}{Y_3 \cdot Y_5 + Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}$$

c'est un montage inverseur

b) le montage est un passe-bas si

$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1}$ est une résistance, $\underline{Y}_2 = j C_2 \omega$ un condensateur, $\underline{Y}_3 = \frac{1}{R_3}$ une résistance,

$\underline{Y}_4 = \frac{1}{R_4}$ une résistance et $\underline{Y}_5 = j C_1 \omega$ un condensateur

La transmittance se met sous la forme $T(j\omega) = \frac{A}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$, cherchons A, ω_0 et m.

Si on prend par exemple $R_1 = R_3 = R_4 = R$,

on trouve que $A = -1$; $\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$ et $m = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$.

Pour calculer C_1 et C_2 , on aura $C_1 = \frac{2m}{3R\omega_0}$ et $C_2 = \frac{3}{2mR\omega_0}$

c) le montage est un passe-haut si

$\underline{Y}_1 = j C_1 \omega$; $\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2}$; $\underline{Y}_3 = j C_3 \omega$; $\underline{Y}_4 = j C_2 \omega$ et $\underline{Y}_5 = \frac{1}{R_1}$

On trouve que $A = -1$, $\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1 R_2}}$ et $m = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$.

d) le montage est un passe-bande si

$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1}$; $\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2}$; $\underline{Y}_3 = j C_2 \omega$; $\underline{Y}_4 = j C_1 \omega$ et $\underline{Y}_5 = \frac{1}{R_3}$

On trouve, si $C_1 = C_2$, que $A = -\frac{R_3}{2R_1}$, $\omega_0 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3}}$ et $m = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_3(R_1 + R_2)}}$.

La bande passante $\Delta\omega$ vaut alors $\Delta\omega = 2m\omega_0 = \frac{2}{R_3 C}$ et

on prendra $R_3 = \frac{2}{C\Delta\omega}$; $R_1 = -\frac{R_2}{2A} = -\frac{1}{AC\Delta\omega}$ et $R_2 = \frac{1}{C} \frac{\Delta\omega}{2\omega_0^2 + A\Delta\omega^2}$.

Pour réaliser un filtre très sélectif, on utilise la méthode suivante :

on fixe la valeur de C,

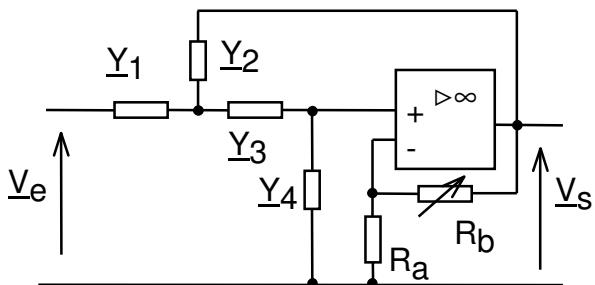
puis $\Delta\omega$ est réglé en agissant sur la valeur de R_3 ,

ω_0 est réalisé grâce à R_2

et l'amplification maximale A grâce à R_1 .

8.2.3. la structure de Sallen-Key

a) Schéma général de ce filtre à boucles multiples



On démontre que

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{K Y_1 \cdot Y_3}{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) + Y_3(Y_4 - K Y_2)}$$

où $K = 1 + \frac{R_b}{R_a}$

c'est un montage non inverseur

b) le montage est un passe-bas si $Y_1 = \frac{1}{R_1}$; $Y_2 = j C_2 \omega$; $Y_3 = \frac{1}{R_2}$ et $Y_4 = j C_1 \omega$

alors $A = K$,

$$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$$
 qui est indépendant de K

et $m = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \left(\frac{1-K}{2}\right)$ est réglable avec K donc grâce au potentiomètre R_b .

Attention, si K est trop grand il y a des risques d'instabilité ($m < 0$).

c) le montage est un passe-haut si $Y_1 = j C_1 \omega$; $Y_2 = \frac{1}{R_2}$; $Y_3 = j C_2 \omega$ et $Y_4 = \frac{1}{R_1}$

alors $A = K$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$ et $m = \frac{1}{2\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} [R_2(C_1+C_2)+R_1 C_2(1-K)]$

d) le montage est un passe-bande $Y_1 = \frac{1}{R_1}$; $Y_2 = \frac{1}{R}$; $Y_3 = j C \omega$ et $Y_4 = j C \omega + \frac{1}{R}$

alors $A = \frac{KR}{2R+R_1(3-K)}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC} \sqrt{1 + \frac{R}{R_1}}$ et $m = \frac{2R+R_1(3-K)}{2\sqrt{R_1(R+R_1)}}$

la bande passante vaut $\Delta\omega = 2m \omega_0 = \frac{1}{RC} [2 \frac{R}{R_1} + 3 - K]$;

il y a donc possibilité de régler la sélectivité.

9. les filtres à variable d'état

Ils sont appelés ainsi car ils permettent de simuler des réponses d'équations différentielles avec des sommateurs et des intégrateurs

9.1. les filtres universels

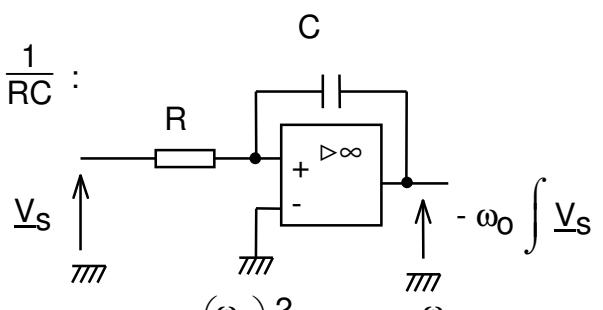
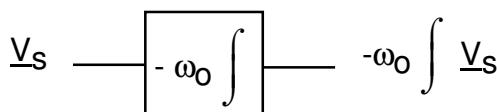
Ils sont réalisés à partir de circuits intégrés, des sommateurs et des intégrateurs, et réalisent des filtres du deuxième ordre : LP2, HP2, BP2 et N2.

$$\text{Prenons l'expression de la transmittance du HP2 : } T(j\omega) = \frac{(j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + 2m j\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2} = \frac{V_s}{V_e}.$$

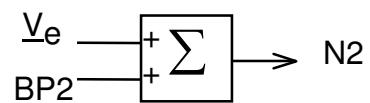
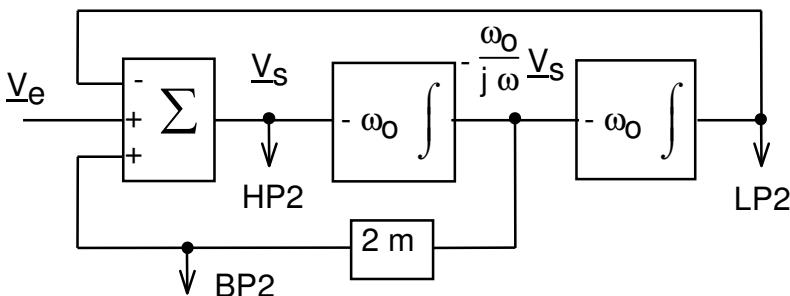
$$\text{Développons cette relation, on obtient : } V_s = V_e - \left(\frac{\omega_0}{j\omega}\right)^2 V_s - 2m \frac{\omega_0}{j\omega} V_s.$$

$-\frac{\omega_0}{j\omega} V_s$ est réalisé avec un intégrateur inverseur où $\omega_0 = \frac{1}{RC}$:

que l'on représente par le symbole suivant :

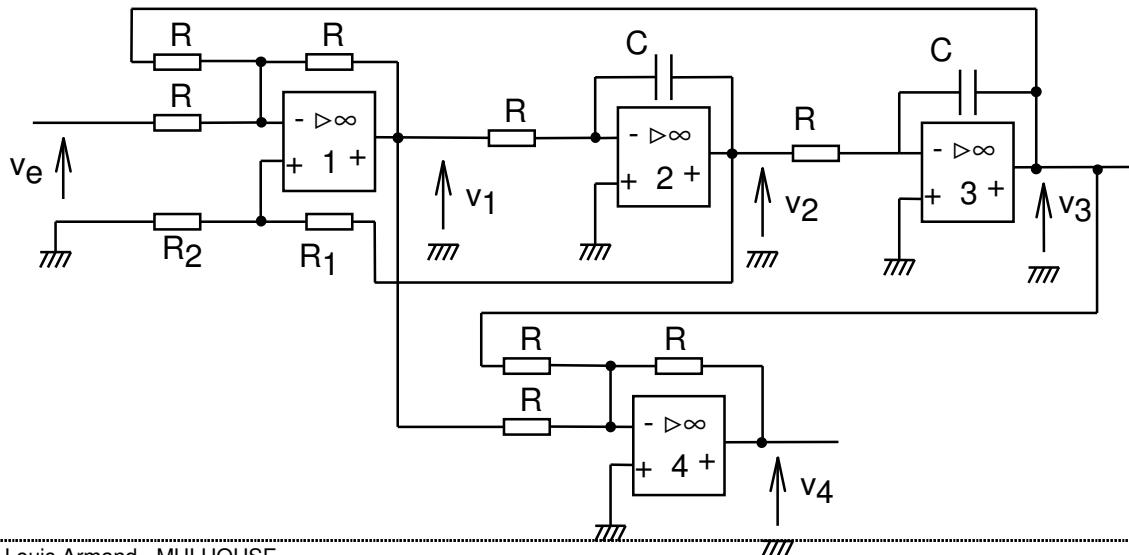


Il est facile d'en déduire le montage "traduction de l'équation $V_s = V_e - \left(\frac{\omega_0}{j\omega}\right)^2 V_s - 2m \frac{\omega_0}{j\omega} V_s$ ".



Remarquons, comme il est indiqué sur la figure ci-dessus que ce même montage réalise à la fois tous les filtrages LP2, HP2 et BP2 , le réjecteur N2 est obtenu en ajoutant un sommeteur supplémentaire.

9.2 . exemple : la cellule biquadratique KHN (de Kervin, Huelsman et Newcomb)

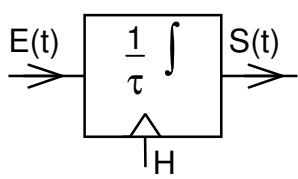


10. les filtres à capacités commutées

Le circuit MF10 est une alternative aux filtres actifs. Ce circuit, en technologie CMOS, est utilisé pour réaliser les cinq types de filtres (LP, HP, BP, AP, N), d'ordre élevé, sans nécessiter beaucoup de composants, sans aucun dipôle réactif externe, simplifiant les équations et les réglages.

Les filtres à capacités commutées sont réalisés à l'aide d'intégrateurs à capacités commutées.

Principe d'un intégrateur à capacités commutées :



Ce sont des modules réalisant la fonction $S(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t E(t) dt$
avec $\tau = \frac{A}{f_H}$ où A est une constante
et f_H , la fréquence d'une horloge H.

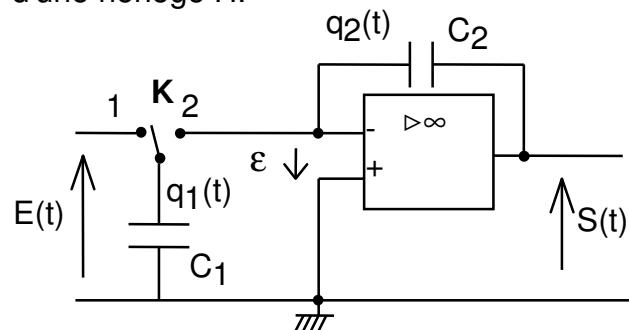
Le commutateur K se déplace d'une borne à

l'autre à la fréquence $f_H = \frac{1}{T}$. L'AOP parfait

fonctionne en régime linéaire ($\epsilon = 0$).

Les durées de charge et de décharge des condensateurs et les commutations de K sont supposées instantanées.

L'étude débute à partir de $t = 0$, C_2 étant déchargé.



ÉTAT DE K	1	2	1	2	1	2		1	2	1	2
TEMPS	0	$\frac{T}{2}$	T	$\frac{3T}{2}$	2T		kT	$(k+1)T$			

C_2 accumule les charges portées par C_1 aux instants successifs 0, T, 2T, ..., kT (k étant entier).

Sa charge vaut alors : $q_2(t) = q_1(0) + q_1(T) + q_1(2T) + \dots + q_1(kT)$ pour $t = (kT)^+$.

En utilisant la formule de la charge d'un condensateur, $q = C u$, on en déduit que

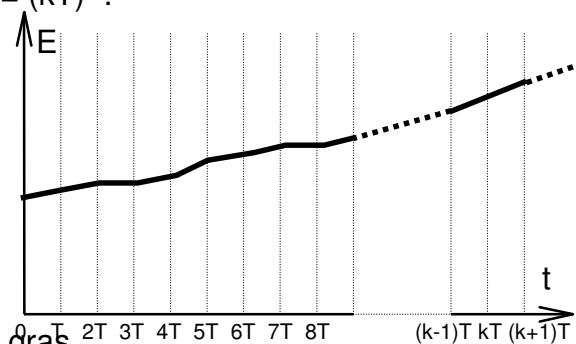
$$S(t) = -\frac{C_1}{C_2} [E(0) + E(T) + E(2T) + \dots + E(kT)] \text{ pour } t = (kT)^+.$$

Dans l'expression précédente de $S(t)$, on introduit la période T pour faire apparaître les produits $T.E(0)$, $T.E(T)$, $T.E(2T)$, ..., $T.E(kT)$.

$$\Rightarrow S(t) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{1}{T} [T.E(0) + T.E(T) + \dots + T.E(kT)]$$

toujours pour $t = (kT)^+$.

Géométriquement, ces produits $T.E(kT)$ sont les aires sous la courbe ci-contre où $E(t)$ est donnée en gras.



Pour une période d'échantillonnage T suffisamment petite, on a alors : $S(t) = -\frac{1}{\tau} \int_0^t E(t) dt$

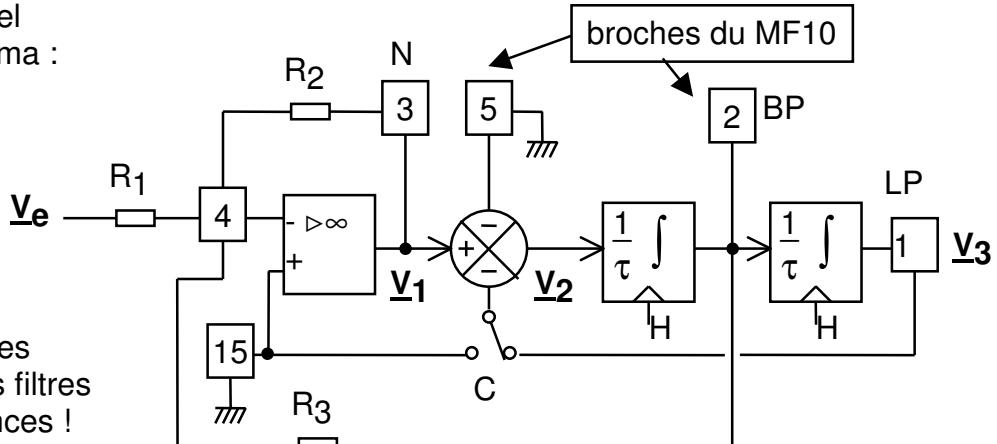
avec $\tau = \frac{A}{f_H}$. La constante A s'exprimant en fonction de C_1 et C_2 .

La cellule de filtrage du CI MF 10 :

Les filtres à capacités commutées sont réalisés à l'aide de deux intégrateurs associés à un amplificateur opérationnel comme l'indique le schéma :

il permet de réaliser à l'aide de trois résistances des filtres LP2, BP2 et N2 :

le CI MF10 a deux cellules pour pouvoir réaliser des filtres d'ordre 4 avec 6 résistances !

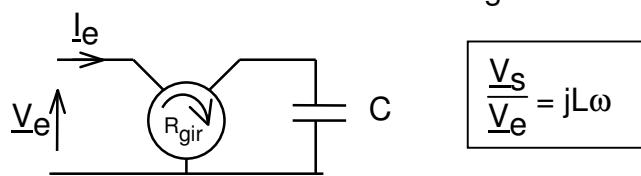
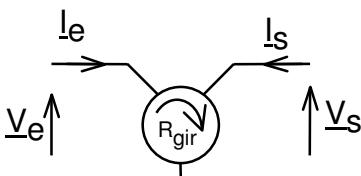


11. les convertisseurs d'impédance : les gyrateurs

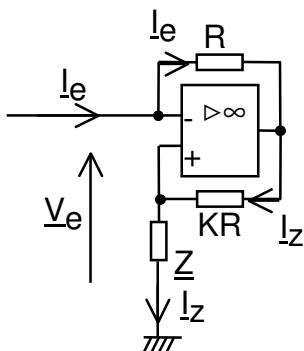
11.1.un gyrateur est un dispositif permettant de simuler des dipôles réactifs tels que des inductances de grande valeur, qui, dans la pratique, sont difficilement réalisables ou alors avec des problèmes de vieillissement et de couplages parasites

Le symbole d'un gyrateur :

simulation d'une inductance $L = R_{gir}^2 C$



11.2. le convertisseur d'impédances négatives (N.I.C. negativ impedance converter)



La tension différentielle est nulle : $\varepsilon = 0$, alors $R \cdot I_e = - K \cdot R \cdot I_z \rightarrow I_e = - K \cdot I_z$ et d'autre part $V_e = Z \cdot I_z$.

On en déduit l'impédance d'entrée Z_e de ce montage :

$$Z_e = \frac{V_e}{I_e} = \frac{Z \cdot I_z}{- K \cdot I_z} = - \frac{Z}{K}$$

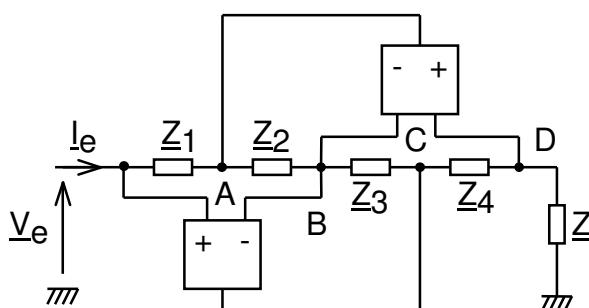
Si Z est une résistance R_0 , $Z_e = - \frac{Z}{K} = - \frac{R_0}{K}$ le montage simule une résistance négative,

Si Z est un condensateur $Z = \frac{1}{jC\omega}$, $Z_e = - \frac{Z}{K} = j \frac{1}{KC\omega} = j \frac{1}{KC\omega^2} \omega$ le montage simule une

inductance $L = \frac{1}{KC\omega^2}$ mais dépendant de ω d'où la nécessité de trouver des montages de simulation d'impédance ne dépendant pas de ω .

11.2. Les convertisseurs d'impédance généralisée (G.I.C. : general impedance converter)

inventés par ANTOUNIOU sont des dispositifs réalisés à partir du montage suivant :



$$\text{d'une part } \underline{V}_e = \underline{V}_B = \underline{V}_D$$

d'autre part

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_e + \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 = 0 \text{ et } \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3 + \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_Z = 0$$

d'où, comme $\underline{I}_Z = \frac{\underline{V}_e}{\underline{Z}}$ et $\underline{I}_2 = \underline{I}_3$, il vient :

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{V}_e}{\underline{I}_e} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_4} \cdot \underline{Z}$$

Gyrateur à GIC:

Si $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z} = R$ et $\underline{Z}_4 = \frac{1}{jC\omega}$, on a alors $\underline{Z}_e = jR^2C\omega$,

le montage simule une inductance pure $L = R^2C$.

Le facteur de qualité de cette bobine est infini si $R_2 = R_3$ rigoureusement !

Super-résistance à GIC :

Si $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 = R$ et $\underline{Z}_1 = \underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$, on a alors $\underline{Z}_e = -\frac{1}{(RC)^2\omega^2}$,

le montage simule une résistance négative dont la valeur dépend de la fréquence !

filtres à GIC :

ci-contre est représenté

un filtre passe-bande

dont la fonction de transfert est

$$T = \frac{\frac{2RCj\omega}{K}}{1 + j\omega \frac{RC}{K} + (jRC\omega)^2}$$

K permet le réglage de m

indépendamment de $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

