M1 info : Bases du Traitement du Signal

Chap V : Filtrage numérique

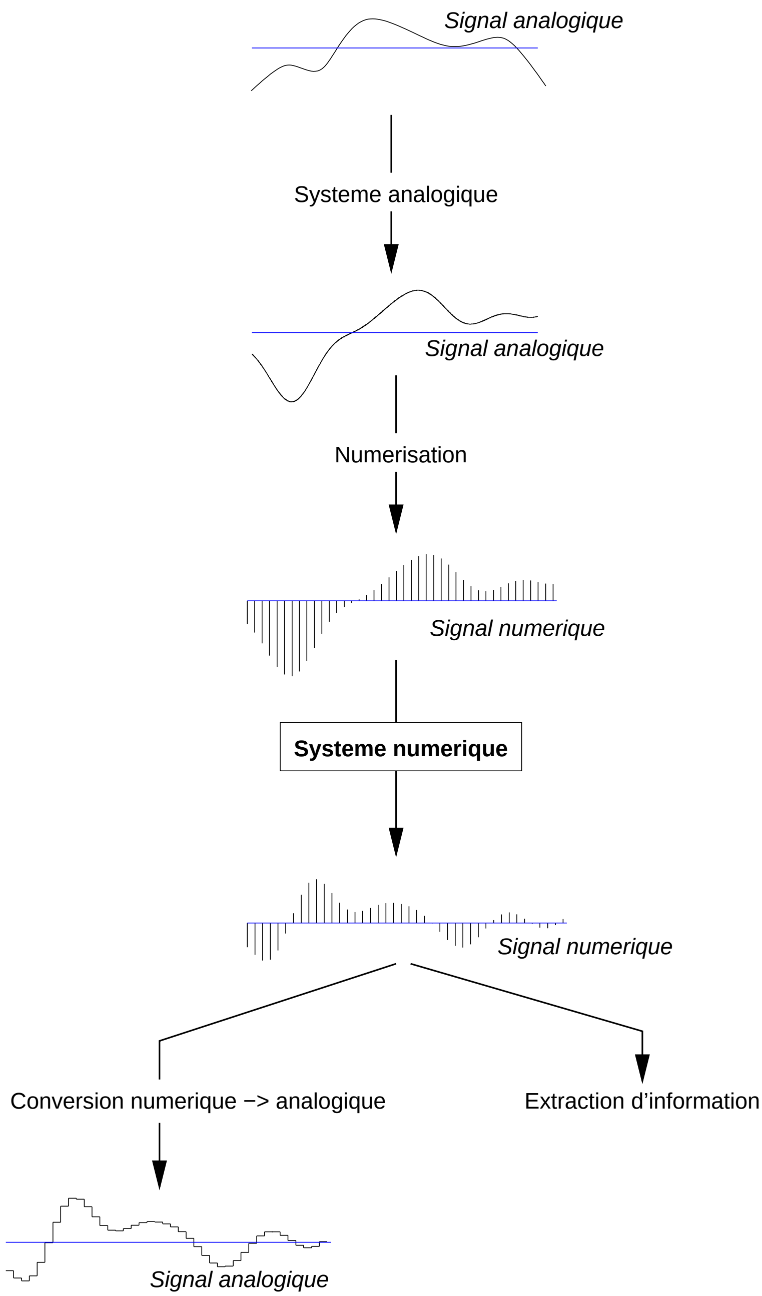


FIG. 1 – Place du fitrage numérique dans la chaîne de traitement du signal.

1 Structure d'un filtre numérique

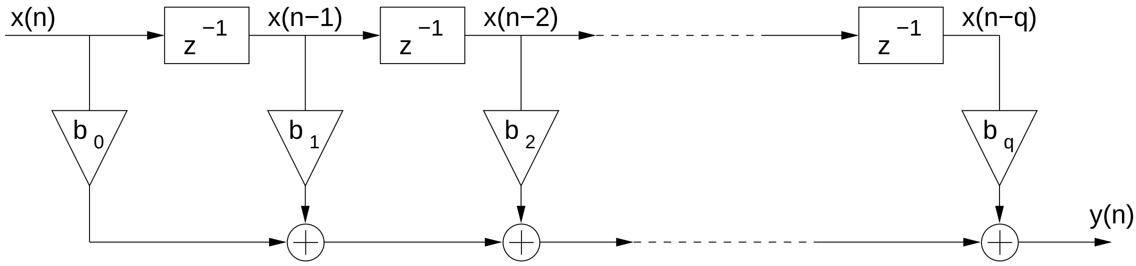


FIG. 2 – Structure d'un filtre non récursif (RIF).

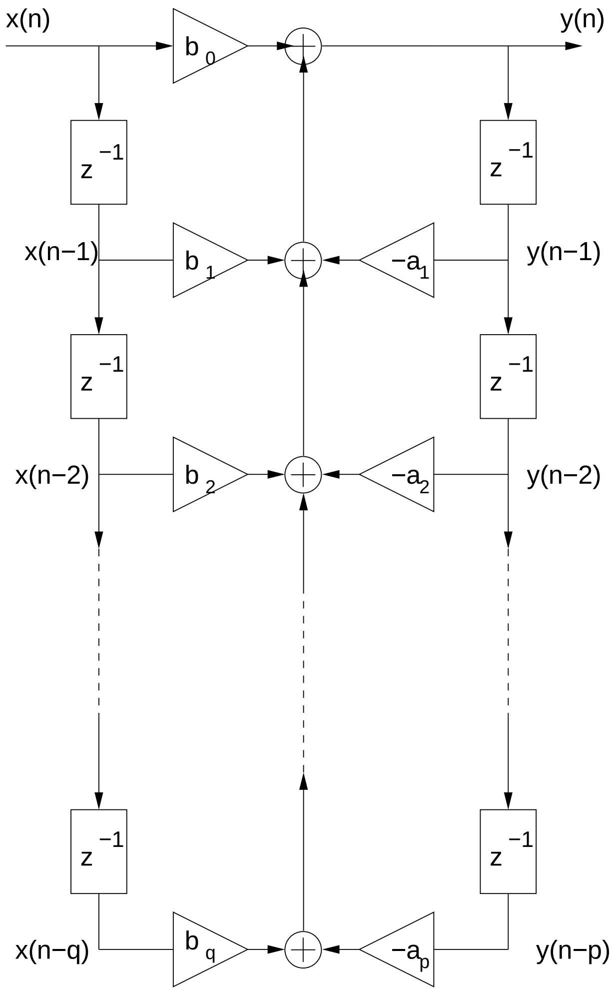
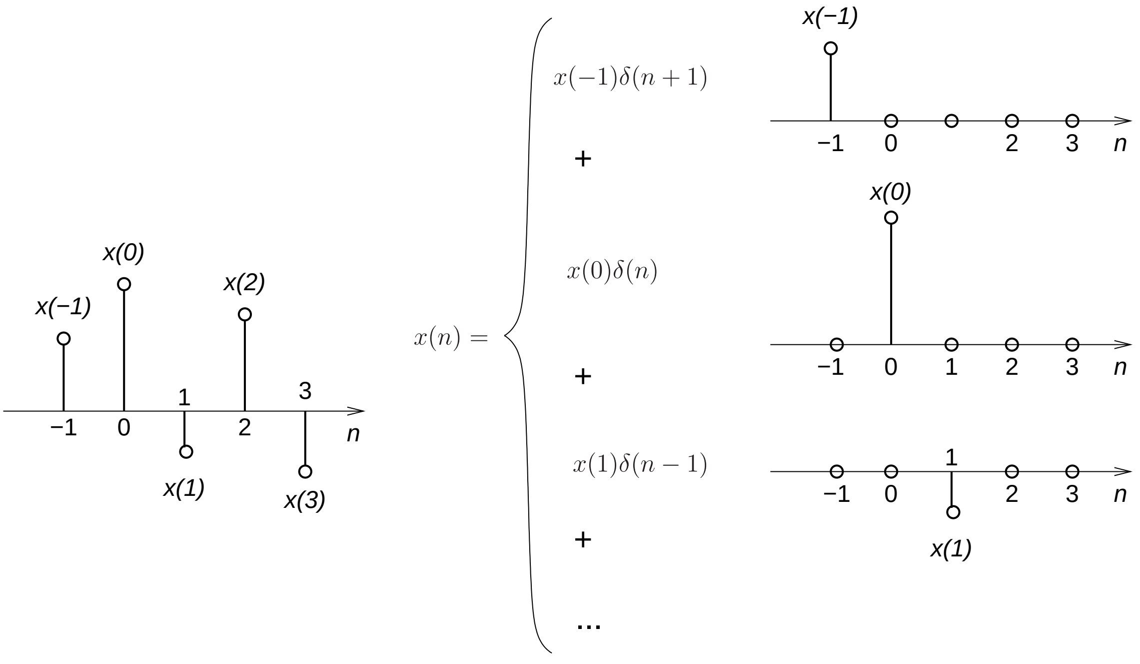


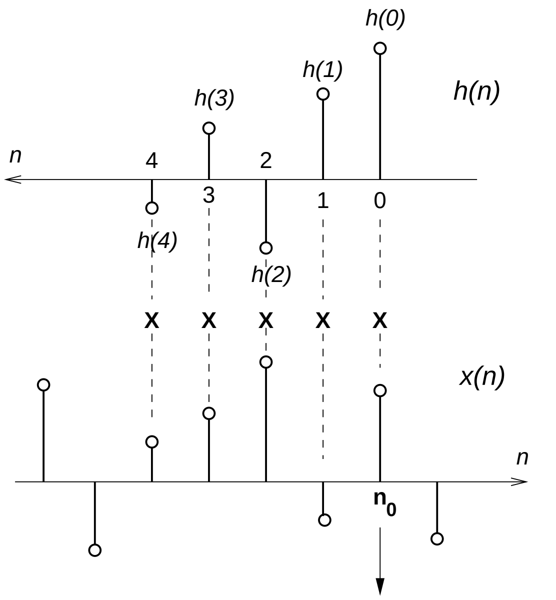
FIG. 3 – Structure d'un filtre récursif (RII).

2 Réponse impulsionnelle



$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

FIG. 4 – Décomposition d'un signal discret en somme d'impulsions unité.



$$y(n_0) = h(0)x(n_0) + h(1)x(n_0-1) + h(2)x(n_0-2)$$
$$+h(3)x(n_0-3) + h(4)x(n_0-4)$$

FIG. 5 – Comment convoluer un signal par la réponse impulsionnelle d'un filtre.

3 Réponse fréquentielle

$$\boxed{y(n) = h(n) * x(n) \Leftrightarrow Y(f) = H(f)X(f)}$$

Démonstration :

Réponse du système S de réponse impulsionnelle $h(n)$ à un signal monochromatique $x_0(n) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 n}$:

$$\begin{aligned}
y_0(n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)x_0(n-k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0(n-k)} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 k} \\
&= x_0(n)H(f_0)
\end{aligned} \tag{1}$$

Soit $x(n)$ un signal discret quelconque et $y(n)$ la réponse du filtre à $x(n)$.

$$x(n) = \mathrm{TF}^{-1}\mathrm{TD}[X(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f n}\mathrm{d}f$$

$x(n)$ apparaît ainsi comme une somme de signaux monochromatiques pondérés chacun d'un facteur $X(f)$.

$$\begin{aligned}
y(n) &= S[x(n)] \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} X(f)S[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f n}]\mathrm{d}f \quad \text{car le systeme est lineaire} \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} X(f)H(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f n}\mathrm{d}f \quad \text{d'apres (1)}
\end{aligned}$$

Or

$$y(n) = \mathrm{TF}^{-1}\mathrm{TD}[Y(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} Y(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f n}\mathrm{d}f$$

Par identification (sachant que ces égalités sont valables $\forall\, n$), il vient : $Y(f) = H(f)X(f)$.

Réciproquement, si $Y(f) = H(f)X(f)$,

$$\begin{aligned}
y(n) &= \mathrm{TF}^{-1}\mathrm{TD}[Y(f)] \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} Y(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f n}\mathrm{d}f \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} X(f)H(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f n}\mathrm{d}f \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} X(f)S[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f n}]\mathrm{d}f \\
&= S[x(n)] \\
&= h(n) * x(n)
\end{aligned}$$

4 Filtrage des signaux aléatoires discrets

Espérance : $\mathrm{E}[x(n)]$

Autocorrélation : $\Gamma(n, n-k) = \mathrm{E}[x(n)x(n-k)]$

Stationnarité : $x(n)$ est stationnaire au sens large si $\mathrm{E}[x(n)]$ et $\Gamma(n, n-k)$ sont indépendants de n. L'espérance et l'autocorrélation sont alors notées $\mathrm{E}[x]$ et $\Gamma_x(k)$

Moyenne et autocorrélation temporelles : pour une réalisation x_0 de x,

$$\overline{x_0} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x_0(n)$$

$$\overline{x_0(n)x_0(n-k)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x_0(n)x_0(n-k)$$

Un signal numérique est ergodique si, pour toutes ses réalisations, ses moyennes temporelles (espérance et autocorrélation) sont les mêmes et égales aux moyennes statistiques

Densité spectrale de puissance : $\gamma_x(f) = \mathrm{TFTD}[\Gamma_x(k)]$

Filtrage

Soit $x(n)$ un signal aléatoire discret, stationnaire au sens large, en entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$. On note $y(n)$ la sortie.

Montrons d'abord que la moyenne de $y(n)$ est indépendante du temps :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[y(n)] &= \mathrm{E}\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)x(n-k)\Big] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)\mathrm{E}[x(n-k)] \quad \text{car l'esperance est un operateur lineaire} \\
&= \mathrm{E}[x]\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k) \quad \text{car l'esperance de } x \text{ est independante du temps} \\
&= H(0)\mathrm{E}[x]
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que l'autocorrélation de y est indépendante de n :

$$\begin{aligned}
\Gamma_y(n, n-k) &= \mathrm{E}[y(n)y(n-k)] \\
&= \mathrm{E}\Big[\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} h(l)x(n-l)h(m)x(n-k-m)\Big] \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} h(l)h(m)\mathrm{E}[x(n-l)x(n-k-m)] \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} h(l)h(m)\Gamma_x(n-l, n-k-m) \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} h(l)h(m)\Gamma_x(k+m-l) \\
&\quad \text{car } \Gamma_x(n, n-k) \text{ ne depend que de } k \text{ et pas de } n
\end{aligned}$$

Ainsi, **si l'entrée d'un filtre numérique est un processus discret stationnaire au sens large, la sortie l'est aussi.**

La densité spectrale de $y(n)$ s'obtient par transformation de Fourier de l'autocorrélation calculée précédemment :

$$\begin{aligned}
\gamma_y(f) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Gamma_y(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fk} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} h(l)h(m)\Gamma_x(k+m-l)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fk} \\
& \quad \text{changement de variable} \quad i = k+m-l \rightarrow k = i-m+l \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} h(l)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fl} \sum_{m\in\mathbb{Z}} h(m)\mathrm{e}^{+\mathrm{j}2\pi fm} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Gamma_x(i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fi} \\
&= H(f)H^*(f)\gamma_x(f) \\
&= |H(f)|^2\gamma_x(f)
\end{aligned}$$

5 Transformée en Z

$$\boxed{\mathrm{TZ}[x(n)*y(n)] = X(z)Y(z)}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathrm{TZ}[x(n)*y(n)] &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(x(n)*y(n)\Big) z^{-n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)y(n-k)z^{-(n-k)}z^{-k} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)z^{-k} \sum_{n\in\mathbb{Z}} y(n-k)z^{-(n-k)} \\
& \quad \text{changement de variable} \quad n-k \rightarrow n \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)z^{-k} \sum_{n\in\mathbb{Z}} y(n)z^{-n}
\end{aligned}$$

NB : ce résultat permet de redémontrer le résultat $\mathrm{TFTD}[x(n)y(n)] = \mathrm{TFTD}[x(n)]\mathrm{TFTD}[y(n)]$, en remplaçant z par $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f}$.

6 Stabilité d'un filtre

$$\boxed{\text{Un filtre de réponse impusionnelle } h(n) \text{ est stable ssi } \sum_{n\in\mathbb{Z}} |h(n)| < \infty.}$$

Démonstration de $\Leftarrow$:

Supposons que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h(n)| < \infty$. Soit $x(n)$ un signal borné : $\exists\, M, \forall\, n, |x(n)| < M$. La sortie y du filtre s'exprime :

$$y(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)x(n-k)$$

Par conséquent,

$$|y(n)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |h(k)||x(n-k)| < M \sum_{k\in\mathbb{Z}} |h(k)| < \infty$$

Donc y est borné.

Démonstration de $\Rightarrow$ par contraposée :

Supposons que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h(n)| = \infty$. Pour montrer que le filtre est instable il suffit de trouver 1 signal d'entrée borné générant un sortie non bornée. Prenons $x(n) = \mathrm{signe}\Big(h(-n)\Big)$. Alors :

$$y(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)x(-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |h(k)| = \infty$$

La sortie n'est pas bornée.