

④ FILTRES A REPONSE
IMPULSIONNELLE INFINIE
FILTRES RII

I. PROPRIETES.....	1
I.1. FONCTION DE TRANSFERT (RAPPELS):	1
I.2. PRINCIPE DE LA TRANSPOSITION :	2
I.3. EXEMPLE:	2
II. APPROXIMATION DE LA DERIVEE :.....	3
II.1. APPROXIMATIONS :	3
II.2. QUALITE DE L'APPROXIMATION :	3
III. INVARIANCE IMPULSIONNELLE	5
III.1. PRINCIPE DE LA METHODE :	5
III.2. QUALITE DE L'APPROXIMATION :	5
IV. TRANSPOSITION PAR BLOQUEUR D'ORDRE N	6
IV.1. PRINCIPE	6
IV.2. BLOQUEUR D'ORDRE 0.	7
IV.3. AUTRES BLOQUEURS.	9
V. TRANSPOSITION PAR POLES ET ZEROS	10
VI. TRANSFORMATION BILINEAIRE	11
VI.1. TRANSFORMATION BILINEAIRE :	11
<i>Principe.....</i>	<i>11</i>
<i>Approximation de l'intégration:.....</i>	<i>12</i>
VI.2. QUALITE DE LA METHODE	12
VI.3. TRANSFORMATION AVEC PRE-DECALAGE (TRANSFORMATION DE TUSTIN).	14
VI.4. EQUIVALENCE DISCRET→CONTINU:	15
VII. QUELQUES RAPPELS SUR LES FILTRES ANALOGIQUES	16
<i>Gabarit – définitions :.....</i>	<i>16</i>
<i>Approximation de Butterworth.....</i>	<i>16</i>
<i>Approximation de Tchebycheff I :.....</i>	<i>17</i>
<i>Approximation de Tchebycheff II :.....</i>	<i>17</i>
<i>Approximation elliptique (Cauer) :.....</i>	<i>17</i>
<i>Exemple :.....</i>	<i>18</i>
<i>Autres approximations :.....</i>	<i>18</i>

FILTRES A REPONSE IMPULSIONNELLE INFINIE : FILTRES RII.(IIR en notation anglo-saxonne)

Les méthodes de synthèse de ces filtres se classent en deux catégories :

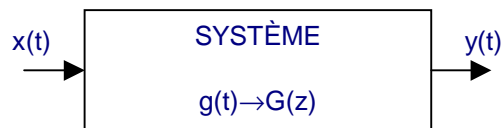
- Les méthodes de transposition : elles partent du principe que le problème de la synthèse des filtres a déjà été largement développé dans le domaine du signal continu. Il a été établi plusieurs méthodes d'approximation polynômiale d'un gabarit aboutissant aux filtres de Butterworth, Tchebychev, Cauer, Legendre....Le filtrage des signaux discrets reprend ces méthodes en cherchant simplement une technique de passage du continu au discret qui préserverai au mieux les caractéristiques du filtre.
- Les méthodes directes : elles cherchent à faire une synthèse directe dans le domaine discret à partir du gabarit. Ce sont des méthodes itératives basées sur la minimisation d'un critère comme celui des moindres carrés utilisé par l'algorithme de Fletcher et Powel.

L'ambition de ce chapitre se limite à l'étude des seules méthodes de transposition.

I. PROPRIETES

I.1. Fonction de transfert (rappels):

Un filtre RII est un système linéaire invariant discret dont le comportement entrée-sortie est caractérisé par les coefficients $\{g_i\}$ de sa réponse impulsionnelle.



Le calcul de la sortie se fait grâce au produit de convolution discret et la transformée en Z permet de définir sa fonction de transfert $G(z)$.

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \delta(t - kT_s) \\ y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n \delta(t - nT_s) \end{aligned} \right\} \rightarrow y_n = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g_i x_{n-i} \quad \text{et} \quad G(z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g_i z^{-i}$$

Dans cette première forme, la suite des $\{g_i\}$ est illimitée et cette forme est donc inadaptée à une implantation du filtre (même pour des filtre causaux où la somme débute en $i=0$).

La seconde description sous forme de fraction rationnelle des polynômes $A(z)$ et $B(z)$ de dimension finie menant à l'équation récurrente est celle qui fournit la base de l'implantation du filtre :

$$G(z) = \frac{\sum_{k=0}^{n_b} b_k z^{-k}}{\sum_{m=0}^{n_a} a_m z^{-m}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad \text{et} \quad y_n = \sum_{k=0}^{n_b} b_k x_{n-k} - \sum_{m=1}^{n_a} a_m y_{n-m}$$

Le premier terme de cette description correspond à une moyenne mobile MA et le second est un terme auto-régressif AR d'où l'appellation de filtres ARMA (AR si le numérateur est restreint à b_0) pour ce type de filtres.

La fonction de transfert peut se mettre aussi sous forme factorisée pôles et zéros :

- Zéros du système \equiv Racines du numérateur $B(z)=0 \rightarrow \{z_j\}$.
- Pôles du système \equiv Racines du dénominateur $A(z)=0 \rightarrow \{z_i\}$.

$$G(z) = K \frac{\prod_j (z - z_j)}{\prod_i (z - z_i)}$$

Cette forme est aussi pratique pour réaliser une analyse fréquentielle rapide des caractéristiques du filtre.

Nous devons toujours nous assurer que la méthode de synthèse utilisée aboutit à un filtre stable soit : $|z_i| < 1$. Si le filtre continu est stable, la stabilité théorique du filtre discret est en général assurée cependant, dans le cas de pôles au voisinage du cercle unité ceux-ci peuvent se retrouver translatés en dehors de ce cercle à la suite d'arrondis numériques.

I.2. Principe de la transposition :

Nous supposons posséder un filtre continu dont la fonction de transfert isochrone $H(j\omega)$ constitue une approximation satisfaisante du gabarit du filtre recherché. Il nous reste à chercher le filtre discret de transfert isochrone $G(e^{j\omega T_s})$ équivalent.

$$H(p) \rightarrow G(z)$$

Il nous faut une méthode à laquelle nous imposons les contraintes suivantes :

- Etre simple.
- Faire en sorte que $G(e^{j\omega T_s})$ soit la plus proche possible de $H(j\omega)$.
- Obtenir une fonction de transfert discrète $G(z)$ qui puisse s'implanter sous forme d'équation récurrente ce qui nécessite une forme de rapport de polynômes $B(z)/A(z)$.

La transposition peut être en toute rigueur parfaite puisque nous savons faire le passage du plan Z au plan p par le changement de variable : $z = e^{pT_s} \Leftrightarrow p = \frac{1}{T_s} \ln(z)$. Cependant cette transposition ne permet pas de conserver le caractère polynomial de la fonction de transfert, il faut donc rechercher des méthodes d'approximation.

I.3. Exemple:

Afin d'illustrer et comparer l'ensemble des différentes méthodes, nous utiliserons pour toutes un exemple de transposition d'un filtre continu de type sélecteur de fréquence.

Les caractéristiques de ce filtre sont les suivantes:

- Fonction de transfert:
$$H(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{2,25}{p^2 + 0,3p + 2,25}$$
- $\omega_0 = 1,5 \text{ rad/s}$; $\zeta = 0,1 \Rightarrow$ résonance pour $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ soit $\omega_r = 1,492 \text{ rad/s} \approx \omega_0$. Nous aurons donc une fréquence de résonance très proche de $f_0 = 0,237 \text{ Hz} \approx 0,24 \text{ Hz}$.
- Gain statique: $H(0) = 1$

- Gain à la résonnance: $|H(\omega_r)| = 5.$
- Limite vers les hautes fréquences: $|H(+\infty)| = 0.$
- Pôles de $H(p)$ $p_{1,2} = -0,15 \pm j 1,4925$

Le module de la fonction de transfert isochrone est porté sur toutes les courbes d'illustration.

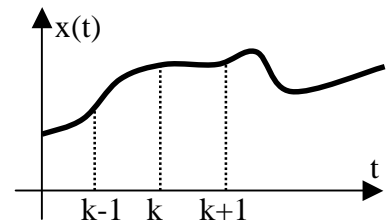
Dans tous les cas, la période d'échantillonnage est choisie $T_s=1s$.

II. APPROXIMATION DE LA DERIVEE :

La variable complexe de Laplace p , est associée à la dérivée temporelle d/dt . Nous pouvons chercher à approximer cette dérivée de manière discrète et lui associer un opérateur polynomial en q^{-1} ce qui substituera à la variable complexe p une fonction polynomiale $D(z)$.

II.1. Approximations :

Nous savons très bien approximer une dérivée de courbe par la méthode des rectangles à un instant $t=kT_s$. Parmi les approximations possibles, les trois plus élémentaires sont :



- Dérivée "arrière" (backward) :

$$\frac{d}{dt} x(t) \cong \frac{x_k - x_{k-1}}{T_s} \Rightarrow p \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_s} = \frac{z - 1}{z T_s}$$

- Dérivée "avant" (forward) : $\frac{d}{dt} x(t) \cong \frac{x_{k+1} - x_k}{T_s} \Rightarrow p \rightarrow \frac{z - 1}{T_s}$

- Dérivée "centrale" : $\frac{d}{dt} x(t) \cong \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2T_s} \Rightarrow p \rightarrow \frac{z - z^{-1}}{2T_s} = \frac{z^2 - 1}{2T_s z}$

Remarque: la première approximation est causale ce qui n'est pas le cas des deux dernières.

II.2. Qualité de l'approximation :

Pour avoir une idée de la qualité de la méthode, il suffit de comparer les caractéristiques fréquentielles des deux fonctions complexes : p , associée à la dérivée rigoureuse et $(1-z^{-1})/T_s$ associée à son approximation discrète.

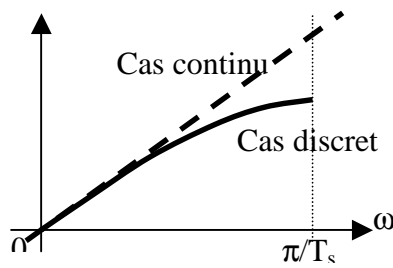
En fréquentiel :

- $p=j\omega \Rightarrow |j\omega|=\omega$ et $\arg(j\omega)=\pi/2$. Résultat classique du dérivateur.

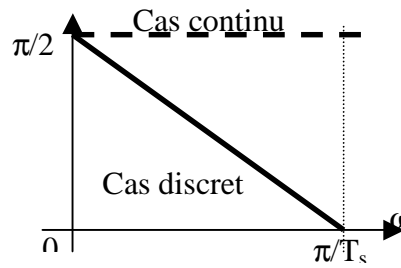
- $p \rightarrow D(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T_s} \Rightarrow D(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_s}}{T_s} = \frac{2j}{T_s} e^{-j\frac{\omega T_s}{2}} \sin(\frac{\omega T_s}{2})$

$$\Rightarrow |D(j\omega)| = \frac{2}{T_s} \sin(\frac{\omega T_s}{2}) \text{ et } \text{Arg}(D(j\omega)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega T_s}{2}$$

La comparaison des modules et des arguments est indiquée ci-dessous:



I.1. Comparaison des modules



I.2. Comparaison des arguments

De l'examen des courbes nous pouvons conclure:

- L'approximation des modules est correcte vers les basses fréquences, mais nettement moins bonne vers les hautes fréquences.
- L'approximation de la phase est peu satisfaisante.

La méthode utilisée aura donc l'avantage de la simplicité de mise en oeuvre, mais la transposition ne peut qu'être médiocre surtout vers les fréquences élevées de la bande de Shannon.

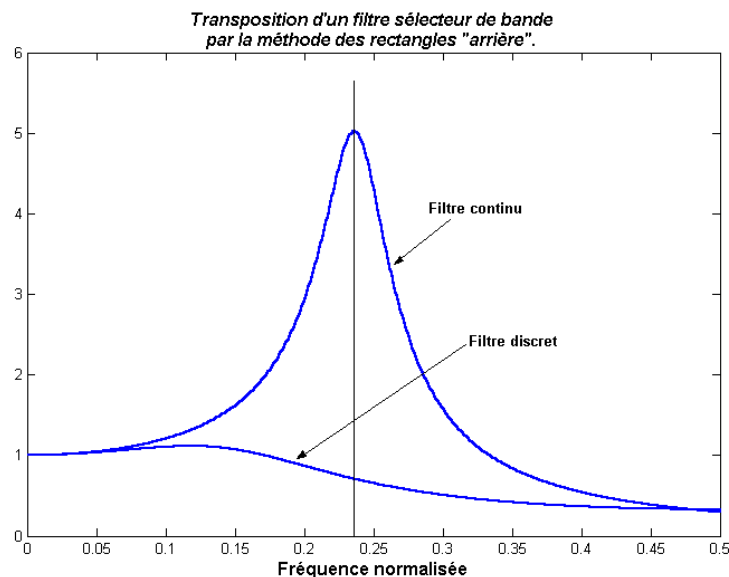
exemple:

Avec l'exemple proposé:

$$H(p) = \frac{2,25}{p^2 + 0,3p + 2,25} \xrightarrow{p = \frac{z-1}{z}} G(z) = \frac{2,25 z^2}{3,55 z^2 - 2,3 z + 1}$$

Soit un système discret ayant un zéro double et deux pôles $z_{1,2} = 0,3239 \pm j 0,4204$.

La réponse en fréquence donnée ci-dessous n'est pas dans ce cas satisfaisante:



III. INVARIANCE IMPULSIONNELLE

III.1. Principe de la méthode :

Une autre idée pour réaliser la transposition continu-discret est de se rappeler qu'un système est caractérisé par sa réponse impulsionnelle. Nous pouvons donc prendre comme système discret celui dont la réponse impulsionnelle est la version échantillonnée de celle du système continu d'origine. D'un point de vue mathématique l'opération est donc simple : pour un système continu de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de fonction de transfert $H(p)$ on obtiendra un système discret de fonction de transfert $G(z)$ correspondant à une réponse impulsionnelle $g(t)$

$$g_1(t) = h(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s) \quad \text{et} \quad H(p) = \text{TL}[h(t)] \Rightarrow G_1(z) = \text{TZ}[g_1(t)] = \text{TZ}[\text{TL}^{-1}[H(p)]]$$

Il faut se rappeler que ce que nous voulons voir coïncider au mieux, ce sont non pas les réponses impulsionnelles mais les réponses fréquentielles. Lors de l'étude des systèmes discrets il a été établi que, pour une pulsation d'échantillonnage ω_s :

$$G_1(e^{j\omega T_s}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(j(\omega - k\omega_s))$$

Cette expression rappelle que, lors d'une discrétisation, nous avons une périodisation du spectre qui donne lieu éventuellement à un phénomène de repliement. Si la condition d'échantillonnage (ici de discrétisation) de Shannon est respectée, ce phénomène n'a pas lieu. La réponse fréquentielle du système discret coïncide donc, dans la bande de fréquences de Shannon, avec celle du système continu cependant il y a un coefficient $1/T_s$ entre les deux introduit par l'échantillonnage. Un coefficient T_s annulera cet effet.

$$\Rightarrow \boxed{G(z) = T_s \text{TZ}[\text{TL}^{-1}[H(p)]]}$$

Dans les cas simples, cette opération peut être très rapide avec l'utilisation de tables ayant en regard les TL et TZ des fonctions usuelles. Pour les fonctions de transfert $H(p)$ d'ordre supérieur ou égal à trois, une décomposition de $H(p)$ en éléments simples du premier et du second ordre sera nécessaire pour utiliser les tables.

III.2. Qualité de l'approximation :

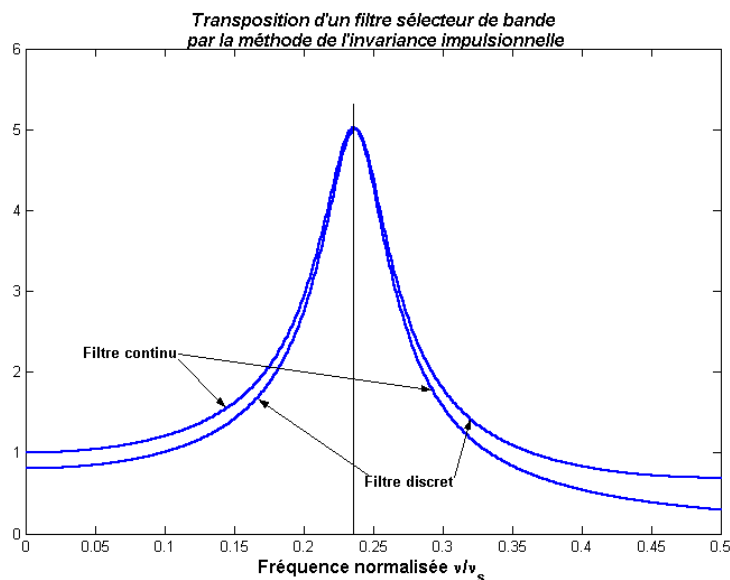
Pour comparer le filtre discret au filtre continu d'origine, il suffit de comparer leurs réponses fréquentielles $G(e^{j\omega T_s})$ et $H(j\omega)$ dans la bande de fréquence de Shannon.

Nous venons de rappeler que la transposition du filtre continu par la méthode de l'invariance impulsionnelle ne peut se faire que si la réponse en fréquence de ce filtre respecte la condition de Shannon : $2\omega_{\max} < \omega_s$. Il est rare que cette condition soit rigoureusement respectée car en général $H(j\omega)$ ne tend vers zéro qu'asymptotiquement et la transposition introduira donc plus ou moins d'écart dans les réponses fréquentielles. Pour les filtres continus de type passe-haut, cette condition n'est à coup sûr pas vérifiée et la méthode ne peut donner de résultat satisfaisant. C'est une méthode qu'il vaut mieux réserver à des filtres ayant un comportement passe-bas ou passe-bande.

exemple:

$$H(p) = \frac{2,25}{p^2 + 0,3p + 2,25} \xrightarrow{\text{Invariance impulsionnelle}} G(z) = \frac{1,292 z^2}{z^2 - 0,13416 z + 0,7396}$$

Soit un système discret ayant un zéro double et deux pôles $z_{1,2} = 0,0671 \pm j 0,8574$ d'où une résonance pour $\omega T_s = \text{Arctg}(0,8574 / 0,0671) \Rightarrow \omega_r = 1,493 \text{rd/s}$



IV. TRANSPOSITION PAR BLOQUEUR D'ORDRE N .

IV.1. Principe

Nous avons un filtre continu dont le comportement est conforme à ce que nous attendons pour des signaux continus :

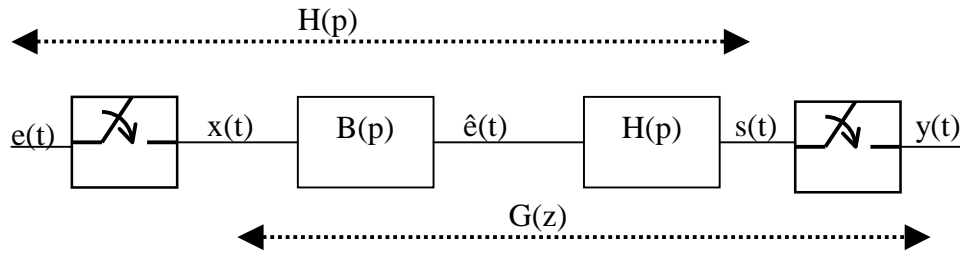
$$s(t) = h(t) \otimes e(t) \quad \Leftrightarrow \quad S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

Comment obtenir le même comportement pour des signaux discrets $x(t)$ et $y(t)$ obtenus respectivement par échantillonnage de $e(t)$ et $s(t)$?

$$y(t) = g(t) \otimes x(t) \quad \Leftrightarrow \quad Y(z) = G(z) \cdot X(z)$$

Nous pouvons imaginer le scénario suivant :

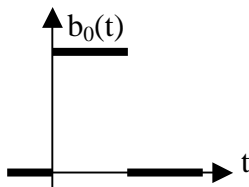
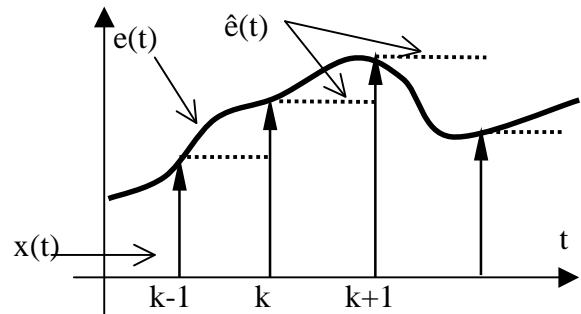
- Le signal continu $e(t)$ est échantillonné ce qui donne le signal $x(t)$.
- Le signal discret $x(t)$ est mis en forme par un dispositif de transfert $B(p)$ pour donner un nouveau signal continu $\hat{e}(t)$.
- Le signal continu $\hat{e}(t)$ est filtré par le filtre continu de transfert $H(p)$ qui fournit le signal continu de sortie $s(t)$.
- Ce signal de sortie $s(t)$ est échantillonné pour fournir le signal discret $y(t)$.



Le système qui relie $x(t)$ discret à $y(t)$ discret a pour fonction de transfert $G(z)$ et le système qui relie $e(t)$ continu à $s(t)$ continu a pour fonction de transfert $H(p)$. La condition évidente pour que ces systèmes aient des comportements fréquentiels identiques est que $\hat{e}(t) = e(t)$. C'est le rôle du système de transfert $B(p)$ qui est un système hybride puisqu'il transforme un signal discret en un signal continu. Aucun système linéaire ne peut remplir cette condition et nous sommes donc amenés à envisager une approximation $\hat{e}(t) \approx e(t)$

IV.2. Bloqueur d'ordre 0.

Un des dispositifs les plus simples pour reconstruire approximativement un signal continu. Il suffit de maintenir le signal à sa valeur x_k entre les instant kT_s et $(k+1)T_s$: blocage du signal entre les deux instants d'échantillonnage. Un bloqueur d'ordre 0 est donc un dispositif qui transforme une impulsion en un signal maintenu pendant une période d'échantillonnage. Sa réponse impulsionnelle $b_0(t)$ et sa fonction de transfert $B_0(p)$ sont donc les suivantes :



$$b_0(t) = u(t) - u(t - T_s) \Rightarrow B_0(p) = \frac{1}{p} (1 - e^{-pT_s})$$

La fonction de transfert ainsi obtenue est la fonction de transfert échantillonnée-bloquée notée $G(z) = B_0H(z)$. Son expression s'établit comme suit :

- La réponse temporelle du système continu de transfert $B_0(p)H(p)$ est

$$\begin{aligned} \text{TL}^{-1}[B_0(p)H(p)] &= \text{TL}^{-1}\left[\frac{H(p)}{p}(1 - e^{-pT_s})\right] = \text{TL}^{-1}\left[\frac{H(p)}{p}\right] - \text{TL}^{-1}\left[e^{-pT_s}\frac{H(p)}{p}\right] \\ &= f(t) - f(t - T_s) \quad \text{avec} \quad f(t) = \text{TL}^{-1}\left[\frac{H(p)}{p}\right] \end{aligned}$$

- Si nous échantillonnons l'entrée et la sortie de ce système, on obtient le système discret de fonction de transfert $G(z)$:

$$G(z) = \text{TZ}[f(t) - f(t - T_s)] = (1 - z^{-1})\text{TZ}[f(t)] = (1 - z^{-1})\text{TZ}\left[\text{TL}^{-1}\left[\frac{H(p)}{p}\right]\right]$$

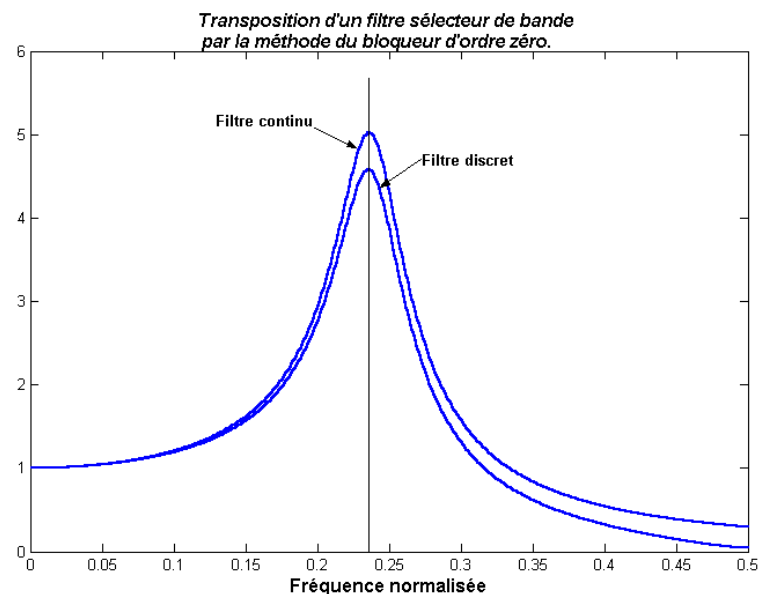
\Rightarrow Transposition avec bloqueur d'ordre 0 :

$$G(z) = (1 - z^{-1})\text{TZ}\left[\text{TL}^{-1}\left[\frac{H(p)}{p}\right]\right]$$

exemple:

$$H(p) = \frac{2,25}{p^2 + 0,3p + 2,25} \xrightarrow{\text{Bloqueur d'ordre 0}} G(z) = \frac{0,8464 z + 0,7597}{z^2 - 0,1347 z + 0,7408}$$

Soit un système discret ayant un zéro en $-0,897$ qui aura donc pour effet d'atténuer vers les hautes fréquences et deux pôles $z_{1,2} = 0,0671 \pm j 0,8574$ d'où une résonance pour $\omega T_s = \text{Arctg}(0,8574 / 0,0671) \Rightarrow \omega_r = 1,493 \text{rd/s}$

Avantage de la méthode :

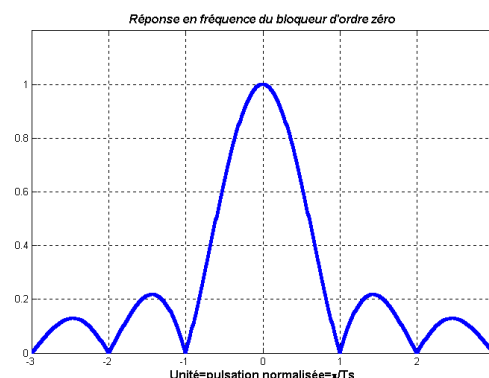
Le bloqueur d'ordre zéro ajoute un filtrage fréquentiel passe-bas sur le filtre continu :

$$B_0(p) = \frac{1}{p} (1 - e^{-pT_s})$$

$$\Rightarrow B_0(j\omega) = T_s e^{-j\frac{\omega T_s}{2}} \frac{\sin(\frac{\omega T_s}{2})}{\frac{\omega T_s}{2}}$$

$$\Rightarrow |B_0(j\omega)| = T_s \left| \frac{\sin(\frac{\omega T_s}{2})}{\frac{\omega T_s}{2}} \right|$$

Ce filtrage passe-bas minimise les effets éventuels du repliement dû à la ce qui peut être vu comme une par rapport à la méthode de l'invariance impulsionnelle.



d'un
discrétisation
amélioration

Remarque 1 : Le calcul de la fonction de transfert échantillonnée-bloquée $G(z)$ fait intervenir l'échantillonnage de $f(t)$ qui est la réponse indicielle du système continu. Si le filtre continu est strictement propre (le degré du

numérateur de sa fonction de transfert est inférieur au degré de son dénominateur), la valeur de la réponse indicielle en $t=0$ est : $f(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[p \frac{H(p)}{p} \right] = 0$.

Le premier échantillon non nul de l'échantillonnage de $f(t)$ est $f(T_s) \Rightarrow$ on peut factoriser dans la fonction de transfert échantillonnée-bloquée un terme en z^{-1} qui correspond dans la réponse impulsionnelle du filtre discret à un retard d'une période d'échantillonnage $G(z)=z^{-1}G^*(z)$.

$G(z)$ est de la forme :

$$G(z) = h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + \dots = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots}$$

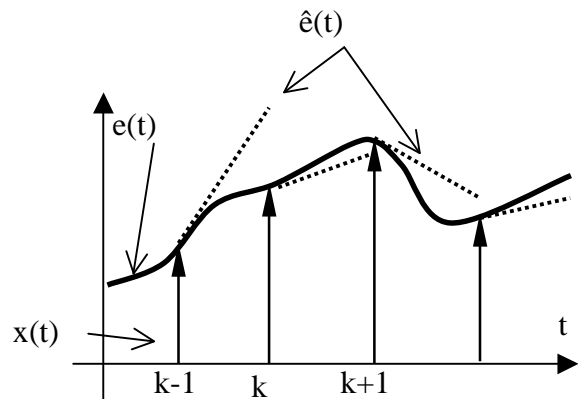
Remarque 2:

Lors de l'application d'un signal de commande à un système continu par l'intermédiaire d'un convertisseur numérique-analogique, ce convertisseur a un effet de bloqueur d'ordre 0. Du point de vue de l'échantillonné, le système commandé est donc constitué de ce bloqueur suivi du procédé continu. Le modèle discret de l'ensemble est donc un modèle avec bloqueur d'ordre 0 systématiquement utilisé par les automaticiens.

IV.3. Autres bloqueurs.

Bloqueur d'ordre 1 :

Plutôt que de bloquer simplement le signal échantillonné entre deux périodes d'échantillonnage, une meilleure approximation $\hat{e}(t)$ peut être obtenue en maintenant pendant l'intervalle $[kT_s, (k+1)T_s]$ la pente à l'instant $t=kT_s$. On utilise alors un bloqueur d'ordre 1 dont la fonction de transfert est une fonction triangle $\text{Tri}(t/T_s)$. La même démarche que pour le bloqueur d'ordre 0 permet de calculer la fonction échantillonnée-bloquée d'ordre 1 :



$$G(z) = \frac{(1-z^{-1})^2}{z^{-1}T_s} \text{TZ} \left[\text{TL}^{-1} \left[\frac{H(p)}{p^2} \right] \right]$$

Bloqueurs d'ordre 2,3,... :

Obtenus en maintenant le signal pendant une période d'échantillonnage avec des approximations polynômiales d'ordre $n>1$. Les expressions de calcul deviennent plus complexes, ces cas sont peu intéressants pour les applications.

Bloqueur exponentiel :

Le principe est toujours le même avec un maintien du signal assuré par une fonction exponentielle.

V. TRANSPOSITION PAR POLES ET ZEROS

Un filtre est rigoureusement caractérisé par la position de ses pôles et ses zéros dans le plan p (en continu) ou dans le plan z (en discret). La donnée de ces points singuliers permet de calculer la fonction de transfert du système à une constante près. Cette constante est précisée par une donnée supplémentaire par exemple le gain statique.

L'idée de cette méthode de transposition est: la transposition $z = e^{pT_s} \Leftrightarrow p = \frac{1}{T_s} \text{Ln}(z)$ n'est pas applicable pour conserver à la fonction de transfert une forme polynomiale, elle est par contre applicable sur les points singuliers que sont les pôles et les zéros.

La transposition par pôles et zéros calcule la fonction de transfert discrète $G(z)$ ayant comme points singuliers les transposés rigoureux des points singuliers de la fonction de transfert continue $H(p)$.

$$H(p) = K_p \frac{\prod_n (p - p_n)}{\prod_k (p - p_k)} \Rightarrow G(z) = K_d \frac{\prod_n (z - z_n)}{\prod_k (z - z_k)} \text{ la transposition des points singuliers étant faite par :}$$

$z_n = e^{p_n T_s}$, $z_k = e^{p_k T_s}$ et l'ajustement du coefficient K_d par l'ajustement du gain statique par exemple : $H(0)=G(1)$ (ou tout autre point de la réponse en fréquence).

La plupart des filtres transposés par cette méthode étant des filtres passe-bas dont la fonction de transfert est strictement propre, nous pouvons renforcer ce caractère passe-bas en discret en annulant la fonction de transfert pour la plus haute fréquence possible c'est à dire $f_s/2$. Pour cela il suffit d'ajouter un ou des zéros en $z=-1$.

La méthode se résume donc ainsi :

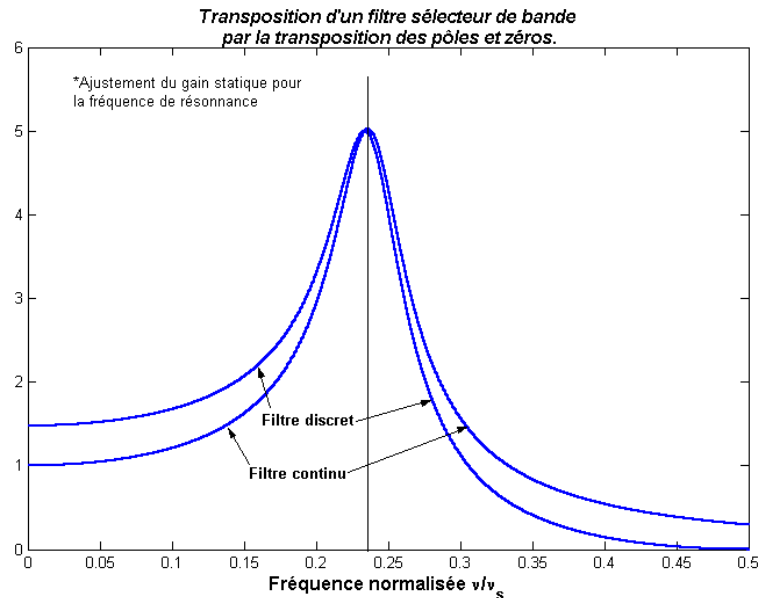
- A partir des zéros $\{p_n\}$ de $H(p)$ nous calculons les zéros $\{z_n\}$ de $G(z)$.
- A partir des pôles $\{p_k\}$ de $H(p)$ nous calculons les pôles $\{z_k\}$ de $G(z)$.
- Nous renforçons le caractère passe-bas en complétant l'ensemble des zéros $\{p_i\}$ par autant de zéros que possible en $z=-1$ tout en conservant à $G(z)$ son caractère propre (degré du numérateur égal au degré du dénominateur).
- On ajuste le coefficient K_d par identité des transferts en un point fréquentiel donné, par exemple en réalisant l'égalité des gains statiques.

exemple:

$$H(p) = \frac{2,25}{p^2 + 0,3p + 2,25} \xrightarrow{\text{Pôles et zéros}} G(z) = \frac{K(z+1)^2}{z^2 - 0,1347z + 0,7408}$$

Soit un système discret ayant:

- deux pôles transposés $z_{1,2} = 0,0671 \pm j 0,8574$ d'où une résonance pour $\omega T_s = \text{Arctg}(0,8574 / 0,0671)$
 $\Rightarrow \omega_r = 1,493 \text{rd/s}$
- pas de zéro à transposer: caractère passe-bas complété en plaçant deux zéros en $z=-1$.
- Le coefficient K est ajusté pour avoir un module de 5 à la résonance.



Validité de la méthode :

Sur le plan théorique, cette méthode est plus difficile à justifier que les précédentes. L'expérience permet de constater que c'est la méthode de transposition qui conserve le mieux les variations de phase et elle donc particulièrement indiquée dans la transposition de filtres continus obtenus à partir des fonctions de Bessel.

Remarque :

Lors des applications, il a été remarqué que l'invariance impulsionnelle et la méthode avec bloqueur d'ordre zéro donnent comme pôles de la fonction de transfert discrète les pôles transposés de ceux de la fonction de transfert continue. Les trois méthodes diffèrent essentiellement par les zéros du filtre discret et donnent des résultats très proches. Le premier défaut de la méthode des rectangles est justement une mauvaise transposition des pôles du filtre continu ce qui explique qu'elle soit beaucoup plus approximative.

VI. TRANSFORMATION BILINEAIRE

VI.1. Transformation bilinéaire :

Principe

Hormis les méthodes d'approximation de la dérivée, les autres méthodes se révèlent rapidement lourdes au niveau du calcul, nous ne pouvons envisager les réaliser « à la main » et cela demande des moyens de calcul.

La transformation bilinéaire consiste à rechercher une méthode simple d'approximation de la dérivée ayant de meilleures performances que celles que nous avons étudiées. L'approximation de la dérivée par la méthode des rectangle est satisfaisante pour une fréquence nulle mais se dégrade vers les moyennes et hautes fréquences.

Dans la transposition $z = e^{pT_s} \Leftrightarrow p = \frac{1}{T_s} \text{Ln}(z)$ nous allons rechercher, pour conserver le caractère polynomial des fonctions de transfert, une approximation par développement limité de z autour de $z=1$ (basses fréquences).

$$\left. \begin{array}{l} z = 1 + \varepsilon \\ \varepsilon = z - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow p = \frac{1}{T_s} \text{Ln}(z) \approx \frac{1}{T_s} \text{Ln}(1 + \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{T_s} = \frac{z-1}{T_s} \text{ nous retrouvons ici la méthode des rectangles « avant ».}$$

La transformation bilinéaire utilise une meilleure approximation de z autour de 1 :

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \\ \varepsilon &= \frac{z-1}{z+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow p = \frac{1}{T_s} \ln(z) = \frac{1}{T_s} \ln\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) = \frac{1}{T_s} [\ln(1+\varepsilon) - \ln(1-\varepsilon)]$$

$$\approx \frac{1}{T_s} \left[\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} + \dots \right) - \left(-\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2!} - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} - \dots \right) \right] = \frac{1}{T_s} \left[2\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{3} + \frac{\varepsilon^5}{60} + \dots \right]$$

En ne conservant que les termes du premier ordre on obtient l'approximation :

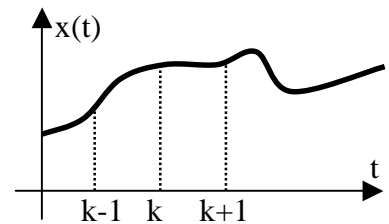
$$p = \frac{1}{T_s} \ln(z) \approx \frac{2\varepsilon}{T_s} = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

La transformation bilinéaire est une approximation de la dérivée telle que :

$$p \rightarrow \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Approximation de l'intégration:

Les méthodes des rectangles ont été présentées comme des approximations de la dérivée par une dérivée "numérique", nous allons montrer que la transformation bilinéaire peut être interprétée comme une approximation de l'intégration par un intégrateur "numérique".



La variable complexe p est associée à la dérivée d/dt , son inverse $1/p$ sera

donc associé à l'intégration $I(t) = \int_0^t x(u) du$.

A l'instant $t=kT_s$, nous pouvons approximer cette intégration par:

$$I_k = I_{k-1} + \frac{x_k + x_{k-1}}{2} T_s \quad \text{soit une équation récurrente : } (1-q^{-1})I_k = \frac{T_s}{2} (1+q^{-1})x_k.$$

Ce qui revient à exprimer le fait que nous remplaçons la variable complexe $1/p$ par: $\frac{T_s}{2} \frac{(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})}$ soit

$$p \rightarrow \frac{2}{T_s} \frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})} \quad \text{ce qui est bien la proposition de l'approximation bilinéaire.}$$

VI.2. Qualité de la méthode

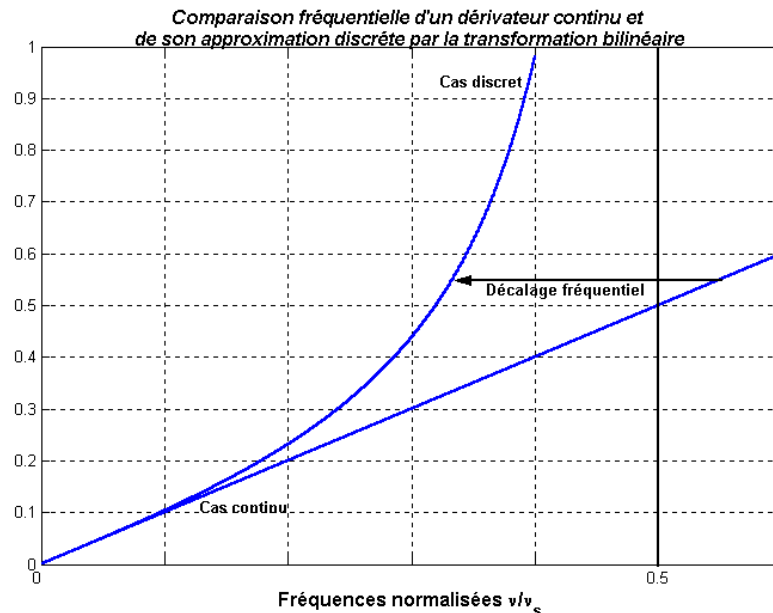
Comme pour les méthodes des rectangles, nous allons comparer les propriétés fréquentielles de la variable complexe p associée à la dérivation exacte et $D(z)$ celle utilisée par la transformation bilinéaire.

En fréquentiel :

- $p=j\omega \Rightarrow |j\omega|=\omega$ et $\arg(j\omega)=\pi/2$. Résultat classique du dérivateur.

$$\bullet \quad \left\{ \begin{array}{l} p \rightarrow D(z) = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow D(j\omega) = \frac{2}{T_s} \frac{e^{j\omega T_s} - 1}{e^{j\omega T_s} + 1} = \frac{2}{T_s} \frac{2j \sin(\frac{\omega T_s}{2})}{2 \cos(\frac{\omega T_s}{2})} = \frac{2j}{T_s} \operatorname{tg}(\frac{\omega T_s}{2}) \\ |D(j\omega)| = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}(\frac{\omega T_s}{2}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Arg}[D(j\omega)] = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

Une première remarque évidente : l'accord des phases est parfait. Qu'en est-il des modules ? Ceux –ci sont



représentés sur le graphe ci-dessous:

Nous mettons en évidence la propriété essentielle de cette transformation : elle effectue une compression des fréquences en faisant correspondre à la bande « continue » $[0; +\infty]$ la demi-bande de Shannon $[0 ; 0,5]$. Ce décalage fréquentiel est plus important vers les hautes fréquences pour devenir négligeable vers les fréquences basses.

Il a deux conséquences :

- En comprimant toutes les fréquences dans la bande de Shannon, il assure l'absence totale de repliement.
- Le décalage fréquentiel ne préserve pas tout à fait les caractéristiques du filtre continu. En effet si nous concevons un filtre sélecteur de fréquence centré sur la pulsation ω_0 , le filtre discret effectuera bien la même opération mais autour de la fréquence décalée ω_1 telle que :

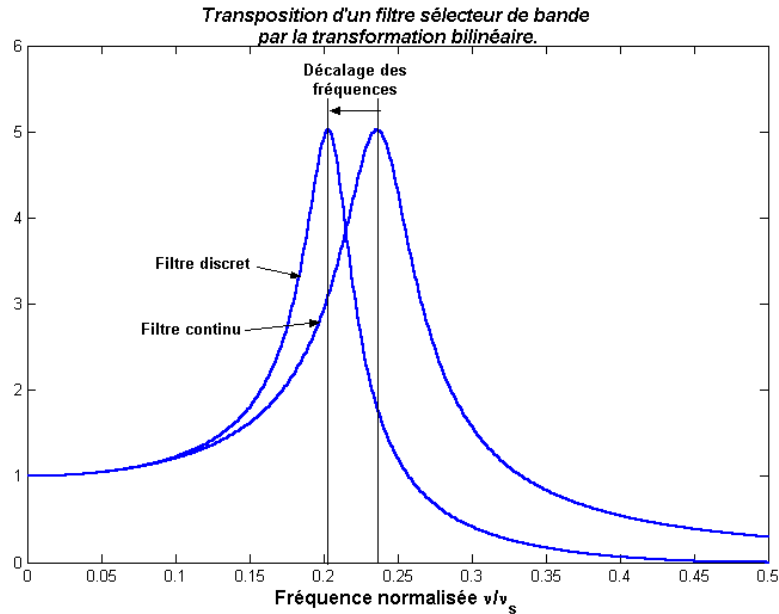
$$\omega_0 = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}(\frac{\omega_1 T_s}{2}) \Leftrightarrow \omega_1 = \frac{2}{T_s} \operatorname{Arctg}(\frac{\omega_0 T_s}{2}) .$$

exemple:

$$H(p) = \frac{2,25}{p^2 + 0,3 p + 2,25} \xrightarrow{\text{Bilinéaire}} G(z) = \frac{0,3285 (z+1)^2}{z^2 - 0,511 z + 0,825}$$

Soit un système discret ayant:

- deux pôles $z_{1,2} = 0,2555 \pm j 0,8715$ d'où une résonance pour $\omega T_s = \text{Arctg}(0,8715 / 0,2555) \Rightarrow$ une résonance décalée $\omega_r = 1,2857 \text{rd/s}$ qui est bien égale à $[2/T_s \text{Arctg}(1,5 T_s / 2)]$.
- Deux zéros en $z=-1$.



VI.3. Transformation avec pré-décalage (transformation de Tustin).

Le décalage fréquentiel est un inconvénient dans certains cas comme ceux des filtres sélecteurs ou réjecteurs de fréquence. Pour palier à cet inconvénient nous adoptons la démarche suivante :

- Conception du filtre continu pour la pulsation ω_0 requise $\rightarrow H(p)$.
- Décalage fréquentiel de ses caractéristiques vers les hautes fréquences autour de la pulsation ω_0^* telle que $\omega_0^* = \frac{2}{T_s} \text{tg}(\frac{\omega_0 T_s}{2})$. $H(p) \rightarrow H(p \cdot \omega_0 / \omega_0^*)$
- Discrétisation du filtre qui décalera les caractéristiques vers les basses fréquences telles que : $\omega_1 = \frac{2}{T_s} \text{Arctg}(\frac{\omega_0^* T_s}{2}) = \frac{2}{T_s} \text{Arctg}(\text{tg}(\frac{\omega_0 T_s}{2})) = \omega_0$. $H(p \cdot \omega_0 / \omega_0^*) \rightarrow G(z)$

Bien sûr, ce pré-décalage ne peut être réalisé que pour une seule fréquence.

exemple:

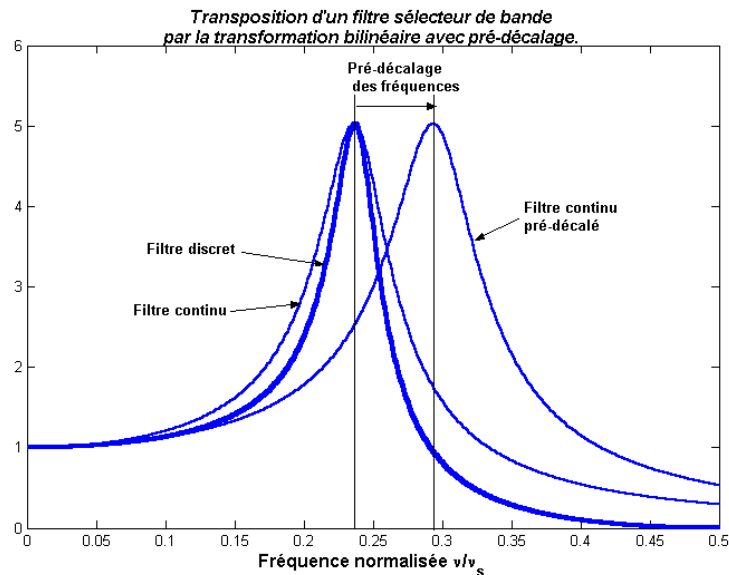
Pour le prédécalage $\omega_r = 1,495 \text{rd/s} \rightarrow \omega_r^* = 1,8539 \text{rd/s} \rightarrow (\omega_r / \omega_r^*) = 0,806$ soit le changement de p en $0,806 p$.

$$H(p) = \frac{2,25}{p^2 + 0,3 p + 2,25} \xrightarrow{\text{Prédécalage}} H(p) = \frac{2,25}{0,6496 p^2 + 0,2418 p + 2,25}$$

$$H(p) = \frac{2,25}{0,6496 p^2 + 0,2418 p + 2,25} \xrightarrow{\text{Bilinéaire}} G(z) = \frac{0,422 (z+1)^2}{z^2 - 0,1307 z + 0,8126}$$

Soit un système discret ayant:

- deux pôles $z_{1,2} = 0,0654 \pm j 0,9024$ d'où une résonance pour $\omega T_s = \text{Arctg}(0,9024 / 0,0654) \Rightarrow$ une résonance $\omega_r = 1,4895\text{rd/s}$ qui est bien celle désirée.
- Deux zéros en $z=-1$.



VI.4. Equivalence discret→continu:

La transformation bilinéaire est une méthode intéressante pour passer du continu à un équivalent discret. Elle permet éventuellement de traiter des problèmes comme étant ceux du continu puis d'implanter la solution technique sur des outils travaillant en discret (ordinateurs, processeurs).

Elle peut être aussi utilisée dans l'autre sens c'est à dire pour faire éventuellement le passage du discret à un équivalent continu. Dans ce cas bien sûr nous utilisons:

$$G(z) \rightarrow H(p) \quad \text{avec} \quad z = \frac{1 + \frac{T_s}{2} p}{1 - \frac{T_s}{2} p}$$

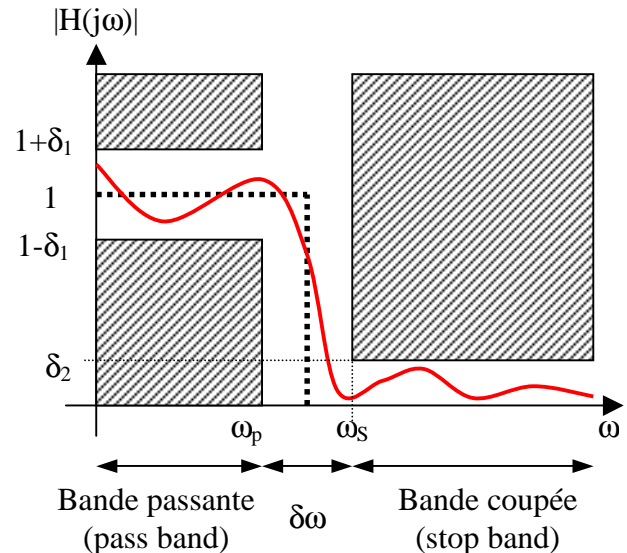
VII. QUELQUES RAPPELS SUR LES FILTRES ANALOGIQUES

Le filtre idéal est irréalisable, les électroniciens ont développé de nombreuses méthodes de synthèse de filtres dont les résultats sont exploitables et transposés au cas discret. Ces méthodes sont basées sur l'approximation d'un gabarit de réponse fréquentielle par une fonction approximante souvent de type polynomial. Nous rappelons ici quelques principes et résultats qui sont développés dans les cours de synthèse des filtres analogiques

Gabarit – définitions :

La fonction de transfert idéale est représentée en pointillé. Cette fonction est irréalisable et nous tolérons des écarts :

- La transmittance en bande passante peut avoir des "oscillations" limitées à $\pm \delta_1$
- La transmittance en bande coupée peut aussi avoir des oscillations limitées à δ_2 .
- Entre la bande passante et la bande coupée il y a une bande de transition de largeur non nulle $\delta\omega$



Toute fonction qui permettra de satisfaire à ces tolérances sera jugée satisfaisante.

Approximation de Butterworth

Dans les années 1930 Butterworth propose des fonctions approximantes du type :

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}}$$

où x est la pulsation normalisée par la pulsation de coupure ω_c : $x = \frac{\omega}{\omega_c}$.

Les fonctions de transfert correspondant aux différents ordres sont tabulées et nous disposons d'une formule qui à partir de $\delta\omega$ permet de connaître l'ordre minimal du filtre nécessaire.

Avantages :

- courbe de réponse fréquentielle plate avec amplitude régulière en bande passante (appelé parfois pour cette raison "maximally flat"),
- bon temps de propagation de groupe
- calculs faciles

Inconvénients :

- raideur de la coupure moyenne

Approximation de Tchebycheff I :

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2(x)}} \quad x = \frac{\omega}{\omega_p}$$

Avec $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ et la relation de récurrence : $T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$

Ces filtres tolèrent une "oscillation" d'amplitude $\delta_1 = \varepsilon$ en bande passante et la réponse est monotone dans la bande coupée. Il existe aussi une relation permettant de déterminer l'ordre du filtre nécessaire à partir des caractéristiques du gabarit.

Avantage :

- le front de coupure est plus raide pour un ordre de filtre donné. A front de coupure identique, ils nécessitent un ordre d'environ 2 fois plus petit qu'un filtre de Butterworth

Inconvénient :

- ondulation en bande passante
- temps de propagation de groupe non constant en bande passante.
- La fréquence de coupure obtenue est légèrement décalée par rapport à celle souhaitée.

Approximation de Tchebycheff II :

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2(x)}} \quad x = \frac{\omega_s}{\omega}$$

Les polynômes sont identiques à ceux du filtre de type I.

Ces filtres tolèrent une "oscillation" d'amplitude $\delta_2 = \varepsilon$ en bande coupée et la réponse est monotone dans la bande passante. Il existe aussi une relation permettant de déterminer l'ordre du filtre nécessaire à partir des caractéristiques du gabarit.

Avantage :

- le front de coupure est plus raide pour un ordre de filtre donné. A front de coupure identique, ils nécessitent un ordre d'environ 2 fois plus petit qu'un filtre de Butterworth
- La fréquence de coupure obtenue est celle qui est souhaitée

Inconvénient :

- ondulation en bande passante
- temps de propagation de groupe non constant en bande passante.

Approximation elliptique (Cauer) :

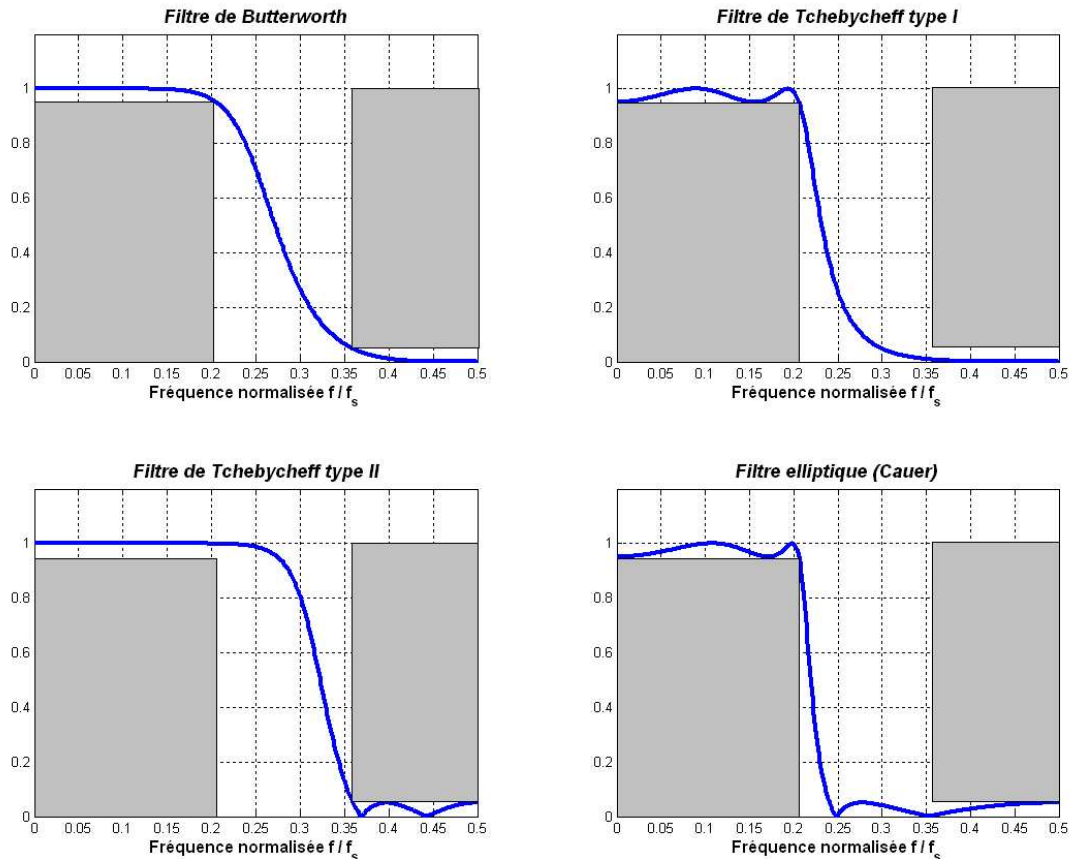
$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 R_n^2(x)}} \quad x = \frac{\omega}{\sqrt{\omega_p \omega_s}}$$

Ces filtres sont considérés comme optimaux c'est-à-dire que, pour un ordre donné, ce sont ceux qui ont la meilleure raideur en coupure. Par contre, ils demandent de tolérer des courbes fréquentielles avec des "oscillations" en bande passante et en bande coupée.

Exemple :

Nous construisons un filtre de Butterworth d'ordre 4, de fréquence de coupure normalisée 0,25. Le résultat obtenu est indiqué sur la figure ci-dessous. En prenant $\delta_1 = 0,05$ cela correspond à une fréquence normalisée $f_p = 0,206$ et $\delta_2 = 0,05$ cela correspond à la fréquence normalisée $f_s = 0,36$. Les zones grisées montrent le gabarit auquel satisfait le filtre de Butterworth avec ces paramètres.

Les trois autres figures montrent comment des filtres de Tchebycheff type I, Tchebycheff type II et elliptique du même ordre (4) satisfont au même gabarit. Ces courbes illustrent les avantages et inconvénients des différentes structures.

**Autres approximations :**

Bessel, Legendre,...