# Chapitre 4 – Systèmes linéaires

L’objet de ce chapitre peut se résumer à l’étude du problème suivant :

*« Un signal donné en entrée d’un système linéaire voit ses caractéristiques modifiées par le système. Est-il possible à partir de la connaissance des caractéristiques du signal d’entrée, de déterminer celles du signal de sortie? »*

Les applications qui mettent en jeu des systèmes linéaires sont multiples , d’où l’importance de ce problème aussi bien dans le cas des signaux déterministes qu’aléatoires. Dans ce dernier cas, le problème paraît plus délicat.

# Chapitre 4 – Systèmes linéaires

Soient $w(t)$ et $y(t)$ respectivement l'entrée et la sortie d'un système linéaire invariant. Un système est invariant si une entrée $w(t)$ produisant une sortie $y(t)$, l'entrée $w(t+\tau)$ produit la sortie $y(t+\tau)$ et ceci quel que soit $\tau$.

- Un système est linéaire s'il vérifie le principe de superposition.

- Réponse

On sait que la sortie d'un système linéaire invariant est égale au produit de convolution de l'entrée et de sa réponse impulsionnelle $h(t)$, soit

$$y(t) = h(t) * w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) w(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) w(\tau) d\tau$$

# Chapitre 4 – Systèmes linéaires

- Stabilité

•Si le système est physiquement réalisable et si l'entrée est nulle pour $t < 0$ , alors on a

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)w(t-\tau)d\tau = \int_0^t h(t-\tau)w(\tau)d\tau$$

• On dit qu'un système est stable si à tout signal d'entrée borné correspond un signal de sortie qui est borné. Si $w(t) \leq M$ pour tout $t$ alors

$$\left|y(t)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)w(t-\tau)d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|h(\tau)\right|\left|w(t-\tau)\right|d\tau \leq M\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(\tau)\right|d\tau$$

• Si $\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(\tau)\right|d\tau < \infty$ , alors le système est stable.

• On peut montrer que si la réponse impulsionnelle n'est pas intégrable, alors le système est instable.

# Chapitre 4 – Systèmes linéaires

- Soit $w(t)$ une entrée aléatoire, la sortie $y(t)$ sera un signal aléatoire définie par

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) w(t-\tau) d\tau$$

On peut se demander si l'intégrale converge pour toutes les réalisations possibles. On peut montrer que si le système est stable et si la fonction $w(t)$ a un moment du second ordre fini, l'intégrale converge pour pratiquement tous les échantillons.

- Valeur Moyenne

La valeur moyenne de $y(t)$ est

$$E\left[y(t)\right] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) h(t-\tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[w(\tau)\right] h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} m_w(\tau)\, h(t-\tau) d\tau$$

Si $w(t)$ est stationnaire, alors

$$E\left[y(t)\right] = m_w \int_{-\infty}^{\infty} h(v) dv = H(0) m_w = m_y$$

avec $H(s)$ fonction de transfert et $H(0)$ gain statique

# Chapitre 4 – Systèmes linéaires

- Fonction d'auto-corrélation

$$R_y(t_1,t_2) = E\left[ y_1(t) y_2^*(t) \right] = E\left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(u) w(t_1 - u) du \int_{-\infty}^{\infty} h(v) w^*(t_2 - v) dv \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(u) du \int_{-\infty}^{\infty} h(v) E\left[ w(t_1 - u) w^*(t_2 - v) \right] dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(u) du \int_{-\infty}^{\infty} h(v) R_w(t_1 - u, t_2 - v) dv$$

Si $w(t)$ est stationnaire, alors

$$R_w(t_1 - u, t_2 - v) = R_w(\tau + v - u), \quad \tau = t_1 - t_2$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) du \int_{-\infty}^{\infty} h(v) R_w(\tau + v - u) dv$$

# Chapitre 4 – Systèmes linéaires

- Analyse harmonique

La densité spectrale du processus en sortie est

$$S_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)du \int_{-\infty}^{\infty} h(v)dv \int_{-\infty}^{\infty} R_w(\tau + v - u) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Mais

$$e^{-j\omega\tau} = e^{-j\omega(\tau+v-u)} e^{j\omega v} e^{-j\omega u}$$

Et

$$S_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-j\omega u} du \int_{-\infty}^{\infty} h(v) e^{j\omega v} dv \int_{-\infty}^{\infty} R_w(\tau + v - u) e^{-j\omega(\tau+v-u)} d(\tau + v - u)$$

$$S_y(f) = H(j2\pi f)\, H^*(j2\pi f)\, S_w(f)$$

$$S_y(f) = \left|H(j2\pi f)\right|^2 S_w(f)$$