

Université de Jijel
Faculté des sciences et de technologie
Département d'Automatique (Master 2 AII)

TP N°4

II.1. Introduction : Commande bang-bang

Il s'agit des commandes à temps minimal avec des contraintes intervalle sur les commandes. La commande optimale est alors toujours égale au maximum ou au minimal

➤ **Démonstration:**

- Système linéaire à une entrée $\dot{x} = Ax + bu, x(t_0) = x_0$.
- Coût $J = \int_{t_0}^{t_f} dt$ (temps minimal).
- Contrainte sur l'entrée $-1 \leq u \leq 1$.
- Contrainte sur l'état final $x(t_f) = 0$

➤ **Application du principe du maximum**

- Le Hamiltonien est $H(x, u, \lambda, t) = 1 + \lambda^T \dot{x} = 1 + \lambda^T (Ax + bu)$
- La commande minimisant le critère est $u^* = \min_{|u| \leq 1} H(x, u, \lambda, t) = -\text{sign}(b^T \lambda)$
- L'équation adjointe est $-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = A^T \lambda$
- Equation d'état $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax - b \text{sign}(b^T \lambda)$

➤ **Exemple illustratif : intégrateur double**

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

➤ **Résolution :**

$$H(x, u, \lambda, t) = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

$$u^* = -\text{sign}(\lambda_2)$$

$$\lambda_1 = c_1$$

$$\lambda_2 = c_1 t + c_2$$

$$x_2 = ut + c_3 = \begin{cases} t + c_3 & \text{si } u = 1 \\ -t + c_3 & \text{si } u = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = u \frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4 = \begin{cases} \frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4 & \text{si } u = 1 \\ -\frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4 & \text{si } u = -1 \end{cases}$$

II.2. Problématique

On remarque que la commande optimale u^* dépend du signe de $\lambda_2(t)$, c'est-à-dire :

$$u^* = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_2 < 0 \\ -1 & \text{si } \lambda_2 > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda_2 = 0 \text{ (rejetée si } \forall t \in \mathbb{R}^+ \text{ et acceptée si } t = t_c) \end{cases}$$

Cependant $\lambda_2(t)$ peut changer son signe à l'instant $t_c = -c_2/c_1$ (t_c temps de commutation).

Alors la commande optimale change sa valeur de +1 à -1 ou de -1 à +1.

Deux problèmes sont posés :

- 1- Point de commutation $x_c = (x_{1c}, x_{2c})$
- 2- La trajectoire de départ ainsi la trajectoire finale

Pour résoudre ces problèmes, on va étudier l'évolution des trajectoires d'état dans le plan x_1, x_2

$$\text{Où } x_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}x_2^2 + c & \text{si } u = 1 \\ -\frac{1}{2}x_2^2 + c & \text{si } u = -1 \end{cases}$$

Pour le sens des trajectoires est déduit par la variation de x_2 c'est-à-dire $\frac{\partial x_2}{\partial t} = u$

II.3. Objectifs

L'objectif de TP est d'écrire un programme qui permet de

- 1- Tracer les trajectoires d'état pour $c = -100 : 10 : 100$.
- 2- Tracer les trajectoires finales
- 3- trouver le point de commutation $x_c = (x_{1c}, x_{2c})$ si $\lambda_2(t)$ change son signe
- 4- Tracer les trajectoires de départ et finales dans une nouvelle figure.

II.4. Applications

$$x(0) = (4, 5);$$

$$x(0) = (3, -0.5);$$

$$x(0) = (4, -5);$$

$$x(0) = (-5, -5);$$

$$x(0) = (-3, -0.5);$$

$$x(0) = (-4, 4).$$