

TP N°5 (LQR)

Objectifs du TP :

Ce TP a pour but d'utiliser Matlab pour la synthèse de correcteurs linéaires quadratiques.

Partie théorique

Dans ce TP on propose d'appliquer un régulateur quadratique optimal sur le modèle du pendule inversé.

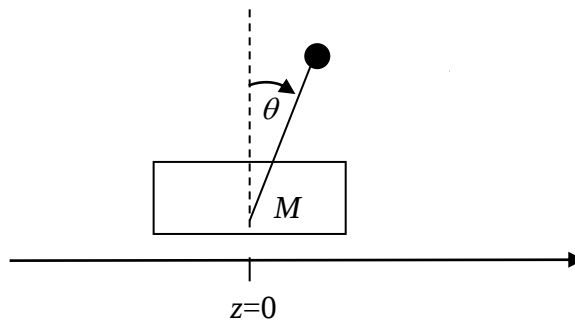


Figure 1: Modèle simplifié du pendule inversé

La commande du système se fait par la tension aux bornes du moteur d'entraînement du chariot. La prise en compte simultanée des modes électriques et mécaniques du pendule inversé, permet de modéliser son comportement dynamique. L'utilisation des séries de Taylor du premier ordre réduit la complexité du modèle, et permet d'aboutir au modèle linéaire :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{RM}(K_m K_g)^2 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{RMl}\left(\frac{K_m K_g}{r}\right)^2 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m K_g}{rRM} \\ 0 \\ \frac{-K_m K_g}{rRMl} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

M est la masse du chariot, m est la masse du pendule, l est la longueur de la tige, g est la pesanteur, R est la résistance d'induit du moteur d'entraînement du chariot, K_m est la constante de flux du moteur, K_g est le rapport de réduction et r est le rayon de la poulie qui entraîne le chariot.

En remplaçant par les valeurs numériques :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & -4.53 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 52.46 & 47.06 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3.78 \\ 0 \\ -12.39 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

L'état x du système est représenté par les variables $x^T = [z \ \dot{z} \ \theta \ \dot{\theta}]$, où $z, \dot{z}, \theta$ et $\dot{\theta}$ représentent respectivement la position du chariot, la vitesse du chariot, l'angle du pendule par rapport à l'axe vertical et la vitesse angulaire du pendule.

Régulateur linéaire quadratique

Le critère à minimiser est

$$J = \frac{1}{2} X(t_f)^T S X(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (X^T Q X + u^T R u) dt$$

La solution du régulateur optimale quadratique se donne en BF par :

$$\begin{cases} u(t) = -K(t)x(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = -A^T P(t) - P(t)A - Q + P(t)BR^{-1}B^T P(t) \\ P(t_f) = S \end{cases}$$

Simulation numérique :

On donne $J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (X^T Q X + u^T R u) dt$ $X_0 = X(0) = [2 \ 0.3 \ 0.4 \ 1]^T$

1. À l'aide de la fonction '**place**' concevoir un correcteur par retour d'état. Tracer la réponse libre du système.
2. Concevoir un retour d'état optimal à l'aide de la fonction '**lqr**' ou '**care**'. Tracer la réponse du système ainsi que la commande pour $(R=1, Q=I_{4 \times 4})$, $(R=0.01, Q=I_{4 \times 4})$, $(R=1, Q=[1000 \ 0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 1])$ et $(R=1, Q=[1 \ 0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1000 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 1])$. Commenter les résultats obtenus et comparer avec (1).
3. En utilisant Simulink refaire la partie (2).