

TP N°6 (Commande LQG)

Objectifs du TP

Ce TP a pour but d'utiliser Matlab pour la synthèse régulateur LQG à base de filtre de Kalman.

Partie théorique

a) Modèle du pendule inversé

Dans ce TP on propose d'appliquer un régulateur LQG sur le modèle du pendule inversé :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & -4.53 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 52.46 & 47.06 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3.78 \\ 0 \\ -12.39 \end{bmatrix} u(t) + w(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + v(t)$$

$w(t)$ et $v(t)$ sont des bruits blancs indépendants de moyennes nulles et de densité spectrale puissance Q_w et R_v respectivement.

b) Régulateur LQG

La commande LQG minimise le critère :

$$J = E \left\{ \frac{1}{2} X(t_f)^T S X(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (X^T Q X + u^T R u) dt \right\}$$

La solution de ce régulateur est la même que pour le cas déterministe :

$$\begin{cases} u(t) = -K(t)\hat{x}(t) = -R^{-1}B^T P(t)\hat{x}(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = -A^T P(t) - P(t)A - Q + P(t)BR^{-1}B^T P(t) \\ P(t_f) = S \end{cases}$$

$\hat{x}(t)$ est l'état estimé par le filtre de Kalman.

$$\text{Filtre de Kalman continu :} \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du) \\ L = P_c(t).C^T R_v^{-1} \\ AP_c + P_c A - P_c C^T R_v^{-1} C P_c + Q_w = \dot{P}_c \\ P_c(t_0) = E\{[x(t_0) - \hat{x}(t_0)][x(t_0) - \hat{x}(t_0)]^T\} \end{cases}$$

$$\text{Filtre de Kalman discret :} \quad \begin{cases} \hat{x}_d(k+1|k) = A_d \hat{x}_d(k|k) + B_d u(k) \\ \hat{y}(k+1|k) = C\hat{x}(k|k) \\ P_d(k+1|k) = A_d P_d(k|k) A_d^T + Q_{wd} \\ L(k+1) = P_d(k+1|k) C^T [C P_d(k+1|k) C^T + R_{vd}]^{-1} \\ \hat{x}_d(k+1|k+1) = \hat{x}_d(k+1|k) + L(k+1)[y(k+1) - \hat{y}(k+1|k)] \\ P_d(k+1|k+1) = [I_{n \times n} - L(k+1)C] P_d(k+1|k) \end{cases}$$

c) Questions

- 1- Donner l'organigramme de calcul du filtre de kalman discret.
- 2- Proposer un organigramme de calcul d'un régulateur LQ continu à horizon fini.

Partie simulation

On donne $J = E\left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (X^T Q X + u^T R u) dt \right\}$ $X_0 = X(0) = [2 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 1]^T$, $R=1$ et $Q=I_{4 \times 4}$.

-Concevoir un régulateur LQG à base de filtre Kalman discret. Prendre pour référence un signal carré d'amplitude égale à 1 et de fréquence égale à 0.5 Hz. Tracer la sortie du système et la sortie estimée ainsi que les erreurs d'estimation pour $P_d(t_0) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0; 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0; 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0; 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$.