Remarque

Si $F_x$est continue sur $\mathbb{R}$et si f est continue, $\forall x \in \mathbb{R}$, alors $F_x$est dérivable et on a : $F_X'(x) = f(x)$.

4. Espérance mathématique (moyenne)

Soit x une VA de fonction de distribution f, l'ensemble mathématique de x que l'on note par E(x) est définie par :

- Pour VAD : $E(x) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i f(x_i) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots + x_n f(x_n)$.
- Pour VAC : $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$.

5. Variance et moments

5.1.Variance

$Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

- Pour VAD :$E(x^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i)$.
- Pour VAC : $E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$.

5.2.Moment non centré d'ordre k

$$m_k = \mathrm{E}(x^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$$

5.3.Moment centré d'ordre k

$$M_k = \mathrm{E}[(x - m_1)]^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^k f(x) dx$$

Exercices série 5 :

Exercice 1 :

Soit x une variable aléatoire de probabilité définie pour $\lambda > 0$ par :

$$P(x = i) = \frac{C\,\lambda^i}{i!}\ , \forall\, i = 0, 1, 2, \ldots$$

Calculer P(x = 0) et P(x > 2).

N-B : C est une constante à déterminer. Pour cela, on utilise le développement en série de la fonction : $x \rightarrow e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie pour $\lambda > 0$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle une densité de probabilité d'une variable aléatoire x ?
2. Calculer P(x > 1).
3. Si $\lambda = 1$, déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire, calculer E(x), V(x), et σ_x.

Exercice 3 :

La fonction de répartition d'une VA x est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 2 \\ (x-2)^2, 2 \leq x < 3 \\ 1, x \geq 3 \end{cases}$$

1. Calculer $P(1 \leq x \leq 5/2)$; $P(5/2 \leq x \leq 7/2)$; $P(5/2 \leq x \leq 3)$.
2. Déterminer la densité de probabilité de la VA x.

Exercice 4 :

On jette deux dés symétriques. Soient x_1 et x_2 les VAs correspondant à la somme et le produit des points obtenus.

1. Construire les suites de répartitions de x_1 et x_2.
2. Calculer $E(x_1)$ et $E(x_2)$.