Chapitre 5 : Lois de probabilité discrètes et continues usuelles

L'objectif du chapitre 5 est de :

- ✓ Décrire les variables aléatoires sous la forme d'une expérience type
- ✓ Analyser cette expérience en détail pour pouvoir déduire les principales caractéristiques de toutes les expériences aléatoires
- ✓ Apprendre à utiliser quelques lois usuelles discrètes.
- ✓ Familiariser avec quelques lois usuelles continues.
- ✓ Calculer et démontrer l'espérance et la variance de chaque loi

Prérequis

Il est recommandé aux apprenants de connaître :

- ➢ Les calculs d'intégrales.
- ➢ Fonctions : limites et continuité.

Mots clés

Bernouli, Binomiale, Poisson, Uniforme, Exponentielle, Normale

1. Lois de probabilités usuelles discrètes

1.1. Loi de Bernoulli:

Définition : On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si ne prenne que les valeurs 0 et 1 tel que P (x = 1) = p; P (x = 0) = 1-p = q.
On note par: X ~ B (p)

Caractéristiques:
E (x) = p; V(x) = pq; σ_x = $\sqrt{pq}$

Preuve : On a $E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i P_i = 1 \times P(X = 1) + 0 \times P(X = 0) = p$
Et $E[(X - E(X))^k] = E[(X - p)^k] = (-p)^k q + (1 - p)^k p$
Soit $E[(X - E(X))^k] = (-p)^k q + (1 - p)^k p$
En particulier $V(X) = E[(X - E(X))^2] = (-p)^2 q + (1 - p)^2 p$
$= p^2 q + (1-p)^2 p = pq\,(p+q) = pq.$

1.2. Loi Binomiale:

Définition: Une variable aléatoire X suit une loi de Binomiale de paramètres n et p si elle admet pour densité de probabilité suivante:

$$k = 0, 1, 2, \dots, n; P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \mathrm{q} = 1 - \mathrm{p}$$

On note par: X ~ B (n, p) :
Une variable de Bernoulli est un cas particulier d.une variable binomiale.

X ~ B (1, p)

Caractéristiques:
E (x) = np; V(x) = np(1-p) = npq; σ_x = $\sqrt{npq}$

Preuve : On a

$$\sum_{k=0}^{n} f(x) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

Ce qui donne, en utilisant la formule du binôme de Neweton

$$\sum_{k=0}^{n} f(x) = (p + (1 - p))^n = 1$$

Ainsi, si on prend, pour tout k entier inférieur ou égal à n;

P (x = k) = f (x)

On définit une variable aléatoire discrète et sa loi de probabilité.
La définition de E (x) donne

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

Comme on a $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$, il vient

$$E(X) = np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

On peut donc écrire en utilisant de nouveau la formule de binôme

$$E(X) = np\,[p + (1-p)]^{n-1} = np$$

On a de même

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Comme on a $C_n^k = \frac{n(n-1)}{k(k-1)}\, C_{n-2}^{k-2}$

Il vient

$$E[X(X-1)] = n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n} C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k}$$
$$= n(n-1)p^2 [p + (1-p)]^{n-2}$$
$$= n(n-1)p^2$$

D'où

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E[X] = n(n-1)p^2 + np$$

Ensuite

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = np(1-p) = npq$$

Exemple 14 : On jette 10 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Quelle est la probabilité d'avoir un total de 8 piles? Soit X une v.a. qui associe à ces 10 lancers de pièce le nombre de pile.

On a X ~ B $(10, \frac{1}{2})$

$$P(X = 8) = C_{10}^{8} (\frac{1}{2})^{8} (\frac{1}{2})^{10-8} = 0.0439$$

1.3.Loi de Poisson

Définition : Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètres λ $(\lambda > 0)$ si elle admet pour densité de probabilité suivante:

$$P(k, \lambda) = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, ...$$

Caractéristiques:

E (X) = λ; V ar (X) = λ; $\sigma_X = \sqrt{\lambda}$

Preuve : On a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\, e^{\lambda} = 1$$

Alors la relation P (X = k) = f (x) définit une variable aléatoire discrète X et sa loi de probabilité.

La définition de E (X) donne

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

Comme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{\lambda}$

il vient E (X) = λ

On a de même

$$E[(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$$

Comme $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = e^{\lambda}$, on obtient $E[(X-1)] = \lambda^2$

Par conséquent $E(X^2) = E[X(X-1)] + E[X] = \lambda^2 + \lambda$

IL en résulte que $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda$

2. Lois de probabilités usuelles continues

2.1.Loi uniforme:

Définition : Une variable aléatoire continue X suit une loi uniforme sur [a, b] si elle admet pour densité de probabilité la fonction f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \notin [a,b] \\ \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a,b] \end{cases}$$

On note par: $X \sim U_{[a,b]}$

Caractéristiques:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \sigma_X = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

Preuve : Par définition de E (X)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

De même

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Comme $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

il vient $V(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$

2.2.Loi exponentielle:

Définition : Une variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle de paramètre λ si elle admet pour densité de probabilité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Caractéristiques:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, V(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma_X = \frac{1}{\lambda}$$

Preuve : Par définition de E (X)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \lim_{x \to +\infty} \int_{0}^{x} \lambda t e^{-\lambda t} dt$$

L'intégration par parties donne

$$\int_{0}^{x} \lambda t e^{-\lambda t} dt = -x e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda x})$$

D'où $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

2.3.Loi normale (Loi normale centrée réduite ou loi de Gauss):

Définition : Une variable aléatoire continue X suit une loi normale centrée réduite notée par N (0, 1), si elle admet pour densité de probabilité la fonction f définie sur R par: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

f étant une densité, la surface comprise entre l'axe des abscisses et la courbe y = f(x) a une aire finie égal à 1:

La fonction de répartition de X: F(x) = $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt$

Caractéristiques:

E (X) = 0; V(X) = 1; $\sigma_x = 1$

Preuve : D'après la définition de

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

La fonction $x e^{-\frac{x^2}{2}}$ est impair, on a, alors E (X) = 0.

De même

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

La fonction $x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire, on a, alors

$$V(X) = 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$$

Faisons le changement de variables par les coordonnées polaires, on obtient facilement

$$V(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$