Cours 2* : *Quelques types de copules paramétriques

1. Les copules Archimédiennes:

La classe des copules Archimédiennes définies par Genest et Mackay [1986], joue un rôle important. D'une part, elles permettent de construire une grande variété de familles de copules, et donc de représenter une grande variété de structures de dépendance. D'autres part, les copules ainsi générées ont des formes analytiques fermées et sont faciles à simuler. En effet, contrairement aux copules gaussiennes et aux copules de Student, les copules archimédiennes ont le grand avantage de décrire des structures de dépendance. Plusieurs raisons justifient l'utilisation de ce type de copules entre autres :

- Grande variété de familles paramétriques.
- Les propriétés particulières et intéressantes que cette classe possède.
- La facilité avec laquelle peuvent êtres construites et simulées.
- La grande variété des différentes structures de dépendance.

La déffinition suivante décrit la forme générale des copules Archimédiennes.

Définition 1 *On appelle copule Archimédienne de générateur ϕ la copule définie par :*

$$C(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v))$$

Avec $\phi : I \to [0, +\infty[$ une fonction continue, strictement décroissante et convexe,vérifiant $\phi(1) = 0$. On définit l'inverse de ϕ par $\phi^{[-1]}$ tel que :

$$\phi^{[-1]}(u) = \begin{cases} \phi^{-1}(u) \ si \ 0 \leq u \leq \phi(0) \\ 0 \ si \ \phi(0) \leq u \leq \infty \end{cases}$$

Si $\phi(0) = \infty$ *alors* ϕ *est strictement décroissante.*

ϕ *est au moins deux fois continument dérivable telle que* $\phi'(u) < 0$ *et* $\phi''(u) > 0$ *pour tout* $u \in I$.

Comme exemple On prend la fonction $\phi(t) = -\ln(t)$ *comme générateur et le pseudo inverse* $\phi^{-1}(t) = \exp(-t)$, *et on construit la copule* C *comme suit*

$$C(u,v) = \exp\left(-\left[(-\ln(u)) + (-\ln(u))\right]\right) = uv = \Pi(u,v)$$

1.1 Propriétés d'une copule archimédienne

Les copules archimédiennes jouent un rôle important car elles présentent de nombreuses propriétés intéressantes.

Théorème 2 *Soit* C *une copule archimédienne avec un générateur* ϕ, *alors :*

- C *est symétrique :* $C(u,v) = C(v,u)$.
- C *est associative :* $C(u, C(v,w)) = C(C(u,v), w)$ *pour tout* $u, v, w \in I$.

Théorème 3 *Soient* X *et* Y *deux v.a dont la copule associée* C *est archimédienne de générateur* ϕ, *alors le tau de Kendall de* X *et* Y *est donné par :*

$$\tau = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}dt$$

Théorème 4 *Soit* C *une copule archimédienne telle que* $\phi^{[-1](t)} = \phi^{-1}(t)$.

- *Si* $(\phi^{-1})'(0)$ *est définie alors :* $C(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u), \phi(v))$
- C *présente une dépendance supèrieure au niveau da la queue de distribution alors* $(\phi^{-1})'(0) = -\infty$ *et on a :* $\lambda(u) = 2 - 2\lim_{s->0} \dfrac{(\phi^{-1})'(2s)}{(\phi^{-1})'(s)}$.
- *On peut aussi citer un résultat similaire pour les indices de queue inférieurs, tel que le coefficient de dépendance de queue inférieur de la copule est donné par :*

$$\lambda(u) = \lim_{s->0} \frac{(\phi^{-1})'(2s)}{(\phi^{-1})'(s)}$$

La densité d'une copule archimédienne

La densité d'une copule archimédienne, de générateur deux fois différentiable est donnée par :

$$C_\theta\left(u,v\right)=\frac{\phi_x^{''}(C_\theta(u,v))\phi_x^{'}(u)\phi_x^{'}(v)}{(\phi_x^{'}(C_\theta(u,v)))^3}$$

1.3 Familles de copules archimédiennes

1.3.1 Copule de Frank

Soit la fonction de générateur $\phi\left(t\right)=-\ln\left[\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right]$, avec $\theta\in[-\infty,0[\cup]0,\infty[$ et son pseudo-inverse $\phi^{-1}\left(t\right)=\frac{-1}{\theta}\log\left(1-\left(1-e^{-\theta}\right)e^{-t}\right)$. On définit la famille de Frank comme suit:

$$C_\theta\left(u,v\right)=-\frac{1}{\theta}\ln\left(1+\frac{(e^{-u\theta}-1)(e^{-v\theta}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$$

- Si $\theta\to-\infty$ alors $C_\theta\to W$.

- Si $\theta\to+\infty$ alors $C_\theta\to M$.

- Si $\theta\to 0$ alors $C_\theta\to\Pi$.

Pour cette famille la variable latente $Z\sim\log\left(1-e^{-\theta}\right)$ où $\theta\in]0,\infty[$

1.3.2 Copule de Clayton

Soit la fonction de générateur $\phi(t)=\frac{1}{\theta}\left(t^{-\theta}-1\right)$, avec $\theta\in[-1,0[\cup]0,\infty[$ et son pseudo-inverse $\phi^{-1}\left(t\right)=\left(t+1\right)^{-\frac{1}{\theta}}$. On définit la famille de Clayton comme suit:

$$C_\theta\left(u,v\right)=\left(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1\right)^{-\frac{1}{\theta}}$$

- Si $\theta \to -1$ alors $C_\theta = W$.

- Si $\theta \to 0$ alors $C_\theta = \Pi$.

- Si $\theta \to \infty$ alors $C_\theta = M$.

Pour cette famille la variable latente $Z \sim \Gamma\left(\frac{1}{\theta}, 1\right)$ où $\theta \in]0, \infty[$.

1.3.3 Copule de Gumbel

Soit la fonction de générateur $\phi(t) = (-\ln t)^\theta$, avec $\theta \geq 1$ et son pseudo-inverse $\phi^{-1}(t) = \exp\left(-t^{\frac{1}{\theta}}\right)$. On définit la famille de Gumbel comme suit:

$$C_\theta(u, v) = \exp\left(-\left[(-ln(u))^\theta + (-ln(v))^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right)$$

- Si $\theta \to 1$ alors $C_\theta \to \Pi$.

- Si $\theta \to \infty$ alors $C_\theta \to M$.

Pour cette famille la variable latente $Z \sim loi\frac{1}{\theta}$-stable où $\theta \in [1, \infty[$.

2. Les copules elliptiques

Toute la littérature abondante de ces dernières années sur les copules était entièrement dévolue au cas bivariée, et lorsque le nombre de dimensions est supèrieur à deux, les auteurs se ramènent toujours à une copule elliptique (normale ou Student) pour la simple et bonne raison qu'elle possède, est que les densités de ces copules sont faciles à calculer et donc plus aisées à simuler. Les copules elliptiques sont des copules associées aux distributions elliptique.

Définition 5 *Un vecteur aléatoire* $X = (X_1, X_2)$ *possède une distribution elliptique, s'il admet la représentation suivante :*

$$X = \mu + RAU$$

où:

- $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$.
- U *est un vecteur aléatoire uniforme sur la sphère unité de* $\mathbb{R}^2$.
- R *est un vecteur aléatoire indépendant de* U.
- A *est une matrice de dimension nxn telle que* $\Sigma = AA^t$, *et est non singulière.*

Définition 6 *La fonction de densité d'une distribution elliptique (si elle existe) est donnée par :*

$$f(x) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} g((X-\mu)^t (X-\mu))$$

où g *est une fonction définie de* $\mathbb{R}^+$ *dans* $\mathbb{R}$, *dite génératrice de densité, uniquement déterminée par la fonction de distribution de* R.

Définition 7 *On appelle copule elliptique toute copule qui s'écrit de la forme suivante :*

$$C_\rho(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\phi_{g,1}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi_{g,2}^{-1}(v)} g\left(\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) dxdy = \phi_\rho(\phi_{g,1}^{-1}(u), \phi_{g,2}^{-1}(v)) \ ,$$

où ϕ_ρ *est la distribution jointe des vas* X *et* Y, $\phi_{g,1}^{-1}(u)$ *et* $\phi_{g,2}^{-1}(v)$ *sont leurs fonctions quantiles respectives et* ρ *leurs coefficients de corrélation* ($\rho \in [-1, 1]$).

2.1. Copule gaussienne:

La copule gaussienne fait partie de la famille des copules elliptiques des copules bivariées a un paramétre utiliser cette copule est conséquent avec la

mesure de dépendance obtenue par le coefficient de corrélation linéaire.
Il s'agit d'une propriété contraignante lorsqu'on veut évaluer la dépendance entre les évènements rares. Un des types de copules les plus utilisées dans la modélisation est la copule normale bivariée.

Définition 8 *soient X, Y deux vas Gaussiennes de moyenne μ et de matrice de covariance* $\sum = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$ *la copule Gaussienne est définie par :*

$$\begin{aligned} C_\rho(u,v) &= \phi_\rho\left(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2-2\rho xy}{2(1-\rho^2)}\right) dxdy \end{aligned}$$

avec $x = \phi^{-1}(u)$ et $y = \phi^{-1}(v)$.

La densité de cette copule:

$$c(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\rho^2x^2+\rho^2y^2-2\rho xy)\}$$

Cette copule est paramétrée par le coefficient de corrélation linéaire ρ.

- *Si $\rho = 0$ alors $C_\rho(u,v) = \Pi$.*
- *Si $\rho = -1$ alors $C_\rho(u,v) = W(u,v)$.*
- *Si $\rho = 1$ alors $C_\rho(u,v) = M(u,v)$.*

Propriétés de la copule gaussienne

- Le taux de Kendall d'une copule gaussienne est donné par : $\tau = \frac{2}{\pi}\arcsin(\rho)$.

- Le rho de Spearman d'une copule gaussienne est donné par : $\rho_s = \frac{6}{\pi}\arcsin(\frac{\rho}{2})$

2.1. Copule de Student

La copule de Student (t copula) est la copule sousjacente à une distribution bivarieé de Student. Elle est définie de la même manière que la copule Gaussienne mais à partir de la distribution de Student centrée réduite. en outre lorsque le degré de libertè tend vers l'infini, la copule de Student est égale à la copule Gaussienne.

Définition 9 *Soit $\rho \in [-1, 1]$, alors la fd de Student à degré κ de liberté est définie par:*

$$t_{\rho,\kappa}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{\kappa\,(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{(\kappa+2)}{2}} dsdt$$

Définition 10 *La copule de Student est une copule paramétrique, paramétrée par le coefficient de corrélation linéaire ρ et le degré de liberté κ . Cette copule est définie par :*

$$C_{\rho,\kappa}\,(u, v) \;=\; t_{\rho,\kappa}(t_\kappa^{-1}(u), t_\kappa^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{t_\kappa^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_\kappa^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{\kappa\,(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{(\kappa+2)}{2}} dsdt$$

la densité de cette copule :

$$c_{\rho,\kappa}\,(u, v) = \frac{\kappa}{2\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\Gamma(\kappa/2)^2}{\Gamma((\kappa+1)/2)^2} \frac{\left[1 + \frac{x^2+y^2-2\rho xy}{\kappa(1-\rho^2)}\right]^{-\left(\frac{\kappa+2}{2}\right)}}{\left[1 + \frac{x^2}{\kappa}\right] \left[1 + \frac{y^2}{\kappa}\right]^{-\left(\frac{\kappa+2}{2}\right)}}$$

où Γ représente la fonction gamma ,avec $x = t_\kappa^{-1}(u)$ et $y = t_\kappa^{-1}(v)$

Propriétés de la copule de Student

Le tau de Kendall et le rho de Spearman de la copule de Student sont les mêmes que ceux de la copule gaussienne.