

# Mecanique analytique



Merouani Messaoud

Université Mohamed Seddik  
Benyahia Jijel

Faculté des Sciences de la  
Technologie

Département Génie  
Mecanique

Email : *messaoud.  
merouani@univ-jijel.dz*

1.0

01-03-2024

# Table des matières

<b>Objectifs</b>	<b>3</b>
<b>I - Chapitre1: Dynamique du solide</b>	<b>4</b>
1. Rappels .....	5
1.1. <i>Point matériel</i> .....	5
1.2. <i>Corps solide</i> .....	5
1.3. <i>Relativité du mouvement</i> .....	5
2. Mouvement d'un solide .....	6
2.1. <i>Mouvement de translation et mouvement de rotation</i> .....	7
3. Mouvement plan .....	8
3.1. <i>Equiprojectivité</i> .....	9
3.2. <i>Centre instantané de rotation : CIR</i> .....	9
4. Angles d'Euler .....	10
5. Mouvement d'un solide dans l'espace .....	11
6. Mouvement à force centrale .....	11
<b>Glossaire</b>	<b>13</b>
<b>Abréviations</b>	<b>14</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>15</b>

# Objectifs

L'enseignement de cette matière donne à l'étudiant les outils nécessaires pour analyser un

problème de mécanique, de choisir la méthode de résolution la plus appropriée par rapport à

la nature du problème, de ses données et de ses inconnues. La matière est scindée en deux

parties ; la première partie concerne la dynamique du solide par l'utilisation de la mécanique

classique, alors que la seconde partie concerne la mécanique analytique en utilisant les

principes énergétiques dans la résolution des problèmes de la mécanique.

# I Chapitre1: Dynamique du solide

# 1. Rappels

## 1.1. Point matériel

Un point matériel est objet matériel dont les dimensions spatiales sont négligeables par rapport aux échelles du mouvement.(1)\*

## 1.2. Corps solide

Est un ensemble de points matériels liés entre eux et caractérisés par les distances mutuelles qui restent constantes (ne subit pas de déformation)(1)\*

## 1.3. Relativité du mouvement

Pour bien comprendre le concept de la relativité du mouvement prenant l'exemple suivant :

Un Train roule lentement, deux personnes A et B sont assis dans le train, une troisième personne C qui est au bord de la route reste immobile (Fig. 1.1)

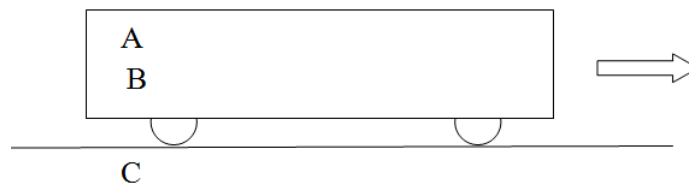


Fig. 1.1 Relativité du mouvement

A par rapport à B est immobile et par rapport à C est en mouvement, donc, la personne A est en mouvement et immobile à la fois. Alors, le mouvement d'un corps ne peut être étudié que par rapport à un solide de référence (référentiel). L'état de mouvement ou de repos d'un corps dépend du référentiel choisis. On dit que le mouvement d'un système est relatif au référentiel choisis. Le référentiel est un système de coordonnées permettant de situer un événement dans l'espace et dans le temps. Le référentiel est l'emplacement de l'observateur et il est constitué idéalement d'un repère d'espace et d'un repère de temps.

### 1.3.1. Repère d'espace

Les solides étudiés évoluent dans un espace physique qui peut être modélisé par un espace caractérisé par un repère de coordonnée orthonormé direct (Fig. 1.2).(2)\*

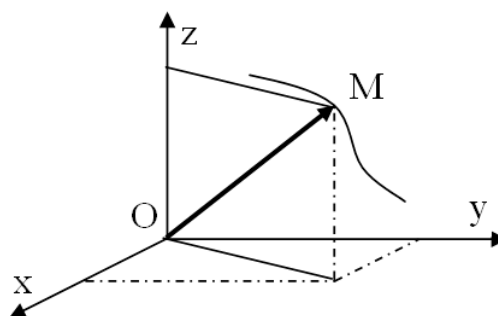


Fig. 1.2. Repère d'espace

Le mouvement d'un corps solide dans un référentiel est déterminé à l'instant  $t$  par(2)<sup>\*</sup> :

- *Vecteur position*
- *Vecteur vitesse*
- *Vecteur accélération*

## 2. Mouvement d'un solide

La cinématique est une partie de la mécanique qui traite le mouvement mécanique uniquement de point de vue géométrique, sans tenir compte des causes qui ont provoqué ce mouvement. La cinématique étudie alors le changement de position géométrique des corps dans le temps. Or, cela ne peut être fait que par rapport à un référentiel où l'on pourrait déterminer la position du corps mobile(1)<sup>\*</sup>

## 2.1. Mouvement de translation et mouvement de rotation

### 2.1.1. Mouvement de translation

Un solide possède un mouvement de translation si tous les points de ce solide se déplacent au même vecteur vitesse instantanée (Fig. 1.3).(3)\*

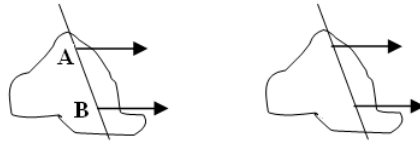


Fig. 1.3. Mouvement de translation

### a) Mouvement de rotation

Un solide tourne autour d'un axe fixe( $\Delta$ ) si tous les points du solide décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe de rotation, sauf les points qui appartiennent à cet axe (Fig. 1.4).(3)\*

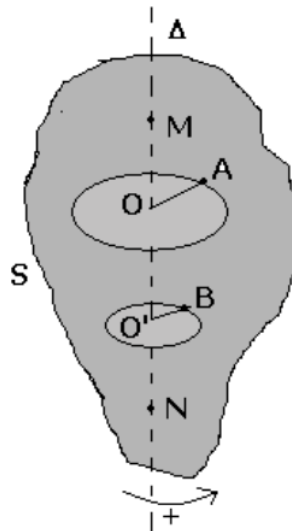


Fig. 1.4. Rotation autour d'un axe fixe

Dans un mouvement de rotation, la position d'un point M du solide à l'instant t est repérée par l'abscisse angulaire (Fig. 1.5)

Et l'abscisse curviligne :

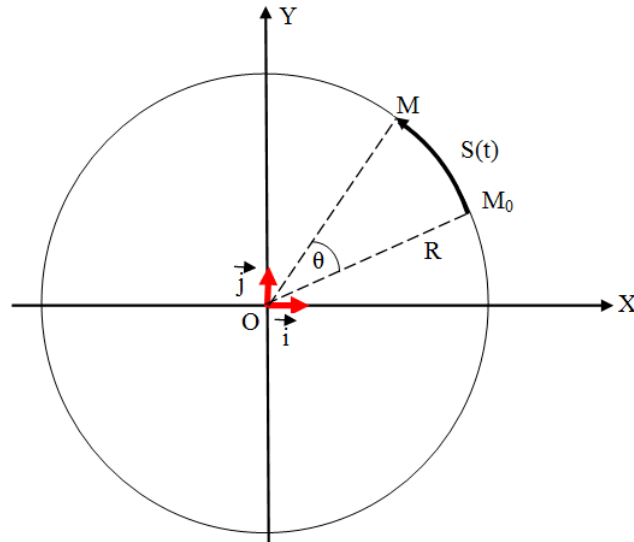


Fig. 1.5. Mouvement de rotation

**Caractéristiques du mouvement de rotation :** Le mouvement de rotation se caractérise par:

- Tous les points décrivent des trajectoires circulaires par rapport à l'axe de rotation
- Tous les points ont le même déplacement angulaire  $\theta$  à l'instant  $t$ .

Exemple :

Un observateur est assis dans un train. Dans chacun des cas suivants, appliquer la troisième loi de Newton, c'est-à-dire pour une masse  $m$  abandonnée sur le plancher du train, déterminez l'accélération et la force résultante par rapport à un système de référence fixe et, si possible, par rapport à un système de référence lié au train:

1. le train accélère uniformément sur une voie rectiligne;
2. le train roule à une vitesse constante sur une voie rectiligne;
3. avec une vitesse linéaire constante, le train parcourt une courbe dont le rayon de courbure est constant;
4. le train décélère uniformément sur une voie rectiligne;
5. le train est au repos.

### 3. Mouvement plan

Lorsqu'un solide est en mouvement plan, tous les points se déplacent dans des plans parallèles à un plan de référence. Une translation (plane) et une rotation d'axe sont des mouvements plans particuliers. L'étude du mouvement plan peut se faire selon deux approches différentes.(4)\*

Prenons l'exemple suivant de l'échelle qui glisse en A avec une vitesse  $\vec{v}_A$  en B avec une vitesse  $\vec{v}_B$  (Fig. 1.6).



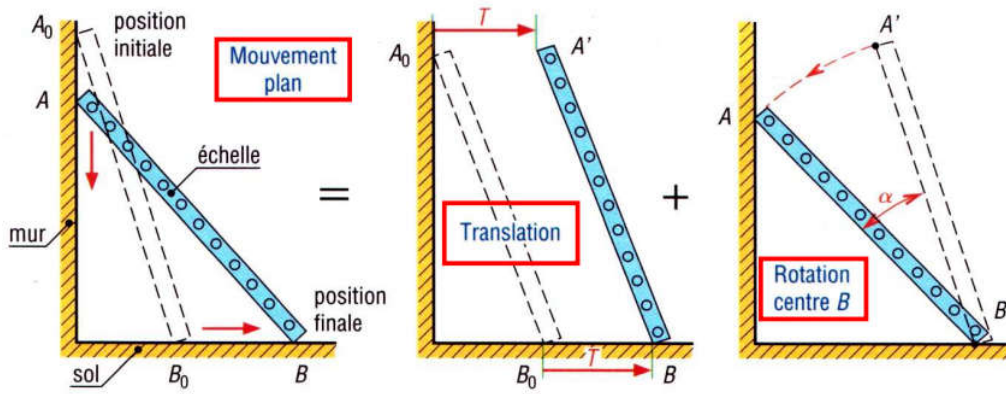


Fig. 1.6 Mouvement plan

L'échelle décrit un mouvement plan par rapport à l'ensemble (sol + mur). Pour passer de la position initiale ( $A_0, B_0$ ) à la position finale ( $A, B$ ), on peut faire une translation ( $T$ ) amenant  $A_0$  en  $A'$  et  $B_0$  en  $B$  suivie d'une rotation d'axe  $B$ , d'angle  $\alpha$ , amenant  $A'$  en  $A$ .

### 3.1. Equiprojectivité

La propriété d'équiprojectivité est l'une des propriétés les plus importantes de la cinématique du solide. Abordée à l'occasion des mouvements plans, elle est également vérifiée pour des mouvements quelconques de solides dans l'espace (Fig. 1.7).(4)<sup>\*</sup>

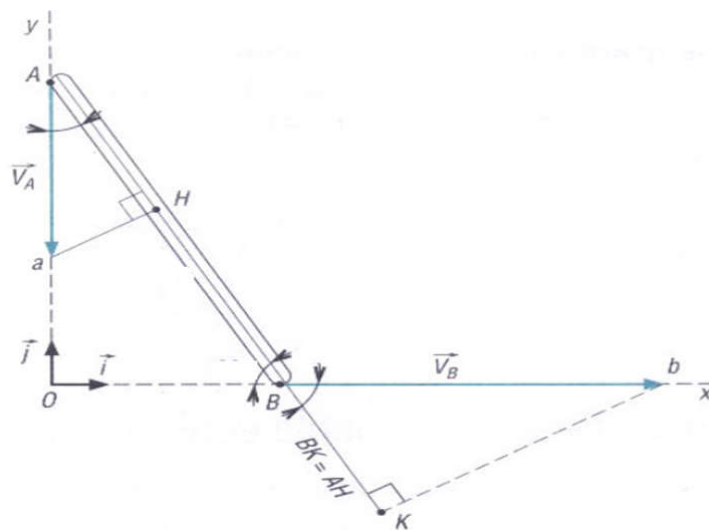


Fig. 1.7 Equiprojectivité

### 3.2. Centre instantané de rotation : CIR

A chaque instant du mouvement plan d'un solide, il existe un point  $I$  de ce plan, et un seul, ayant une vitesse nulle, ce point est appelé centre instantané de rotation (C.I.R.)<sup>\*</sup>. Soient deux points  $A$  et  $B$  appartenant à  $(S)$  en déplacement par rapport à  $RO$ .

- Le centre instantané de rotation se trouve à chaque instant sur la normale à la trajectoire  $TA$  d'un point quelconque  $A \in R/RO$ .

- Il est situé également sur la normale à la trajectoire  $TB$  d'un point quelconque  $B \in R/RO$ .  $\Rightarrow$  Le C.I.R. se trouve donc à l'intersection des normales aux vecteurs vitesses  $\vec{v}_A \in R/RO$  et  $\vec{v}_B \in R/RO$ . Il permet de déterminer graphiquement la vitesse d'un point quelconque de  $(S)$  à l'instant  $t$ , à partir d'une vitesse connue.

Exemple :

Une barre de longueur  $AB=3\text{m}$  glisse en A avec une vitesse de  $0.5\text{ m/s}$  (Fig. 1.8)

- Déterminer par calcul et par la méthode graphique (C.I.R) la vitesse en B sachant que celle-ci appartient au plan du sol

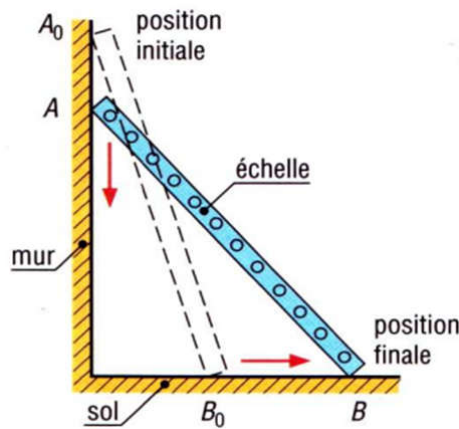


Fig. 1.8 Glissement d'une barre dans un plan

## 4. Angles d'Euler

Le mouvement d'un solide par rapport à un référentiel fait intervenir 6 paramètres, qui sont les trois coordonnées décrivant la position de son centre de masse (ou d'un point quelconque du solide) et trois angles, nommés les angles d'Euler. Les angles d'Euler peuvent servir à représenter l'orientation d'un solide par rapport à un repère fixe. Ils sont utilisés pour la construction du vecteur rotation instantané du solide, nécessaire à l'étude de sa cinématique. L'objectif est de passer du référentiel fixe  $Oxyz$  (le repère de navigation) au référentiel lié au solide  $O'x'y'z'$  (le repère mobile) par trois rotations successives(4)<sup>\*</sup> :

- La précession : première rotation autour de l'axe  $OZ$  du repère fixe « Précession » (Fig. 1.9).
- La nutation : seconde rotation autour de l'axe  $OX_1$  nouvellement créé « Nutation » (Fig. 1.10).
- La rotation propre, dernière rotation autour de l'axe  $OZ'$ , créé suite au deux premières rotations « Rotation » (Fig. 1.10).

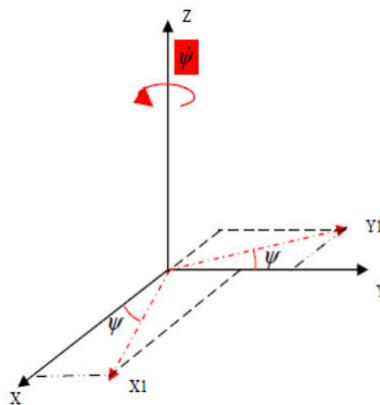


Fig. 1.9 Précession

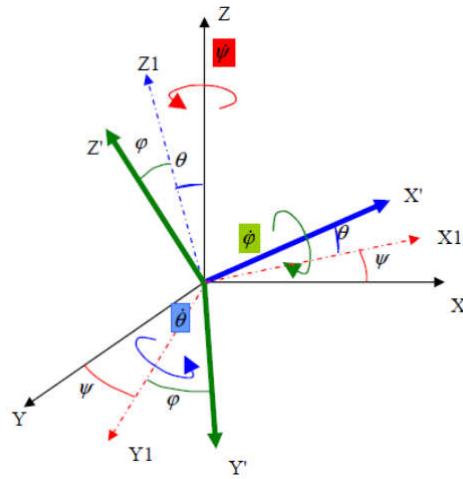


Fig. 1.10. Angles d'Euler

Cf. "video 1"

## 5. Mouvement d'un solide dans l'espace

Positionner un solide dans l'espace par rapport à un référentiel revient à positionner le repère lié au solide par rapport au repère lié au référentiel (4).\*

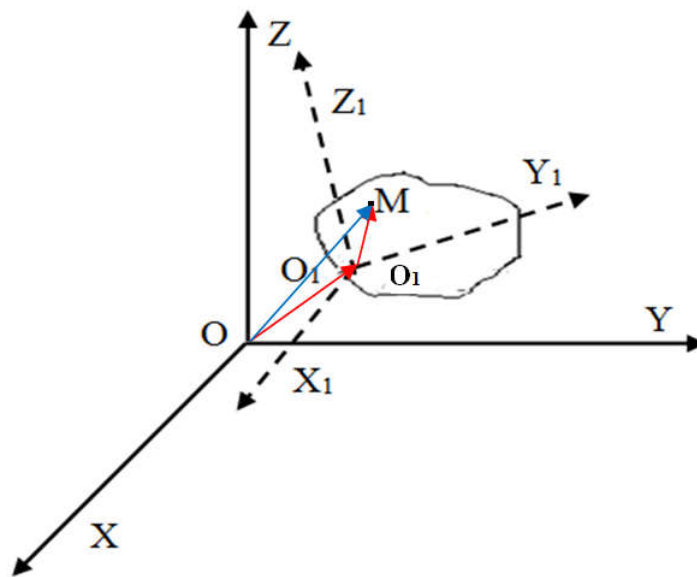


Fig. 1.11 Repères du solide dans l'espace

## 6. Mouvement à force centrale

Une force centrale, est une force qui agit sur un point matériel M et possédant les propriétés suivantes(2)\* :

- Sa ligne d'action passe par un point fixe O dit, centre de la force centrale (Fig. 1.12).
- Sa valeur ne dépend que de la distance entre le point O et le point M

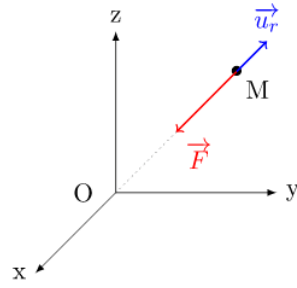


Fig. 1.12 Force centrale

Cette force est conservative (le calcul de son travail ne dépend pas du chemin suivi), elle dérive donc d'une énergie potentielle

# Glossaire

## **centre de gravite**

Le centre de gravite d'un objet, ou centre de masse, est le point de l'espace où l'on applique les effets d'inertie,

## **l'énergie cinétique**

En physique, l'énergie cinétique est l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement dans un référentiel donné. Dans le Système international, son unité de mesure est le joule (J).

## **moment d'inertie**

Le moment d'inertie d'un système physique est une grandeur qui caractérise son inertie vis-à-vis des mouvements de rotation, comme sa masse caractérise son inertie vis-à-vis des mouvements de translation.

# Abréviations

**CIR** : Centre instantané de rotation

# Bibliographie

1- S. Targ, Éléments De Mécanique Rationnelle, éditions Mir, Moscou.

2- J. Starjinski, Mécanique rationnelle , édition Mir, Moscou.

3- H. Cabannes, Problèmes de mécanique générale, Dunod.

4- M. Combarous, D. Desjardin & C. Bacon, Mécanique des solides et des systèmes : Cours et exercices corrigés, Dunod.