TD 04 : interpolation polynomiale

Exercice 01

1/ Déterminer le polynôme de Lagrange qui passe par les points donnés par le tableau ci-après :

x_i	0	2	4	6
$f(x_i) = f_i$	0	4	0	4

2/ Comparer le polynôme trouvé avec celui de Newton.

Solution :

1/ Le polynôme de Lagrange : $P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i(x)$; $L_i = \prod_{j=0, j\neq i}^{n-1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ et $a_i = f_i$

	x_0	x_1	x_2	x_3
xi	0	2	4	6
f(xi)=fi	0	4	0	4

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(0-2)(0-4)(0-6)} = -\frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{48} ;$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-4)(x-6)}{(2-0)(2-4)(2-6)} = \frac{(x-0)(x-4)(x-6)}{16} ;$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-6)}{(4-0)(4-2)(4-6)} = -\frac{(x-0)(x-2)(x-6)}{16} ;$$

$$L_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(6-0)(6-2)(6-4)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{48}$$

$$P(x) = a_0L_0(x) + a_1L_1(x) + a_2L_2(x) + a_3L_3(x) \Leftrightarrow P(x) = 0.L_0(x) + 4.L_1(x) + 0.L_2(x) + 4.L_3(x)$$

$$\boxed{P(x) = \frac{20}{3}x - 3x^2 + \frac{1}{3}x^3}$$

2/ Le polynôme de Newton :

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ ...$$
$$+ f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}](x - x_0)(x - x_1) ... (x - x_{n-2})$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f[x_0, x_1, ..., x_i] \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$$

$$f[x_0] = f(x_0) \ ; \ f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} ; ; \ f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$x_0=0$	$f[x_0]=0$	$f[x_0,x_1] = \frac{4-0}{2-0} = 2$	$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{-2-2}{4-0} = -1$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{1+1}{6-0} = \frac{1}{3}$
$x_1=2$	$f[x_1]=4$	$f[x_1,x_2] = \frac{0-4}{4-2} = -2$	$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{2+2}{6-2} = 1$	
$x_2=4$	$f[x_2]=0$	$f[x_2,x_3] = \frac{4-0}{6-4} = 2$		
$x_3=6$	$f[x_3]=4$			

$$\Rightarrow P(x) = 0 + 2(x - x_0) - 1(x - x_0)(x - x_1) + \frac{1}{3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$= 0 + 2(x - 0) - 1(x - 0)(x - 2) + \frac{1}{3}(x - 0)(x - 2)(x - 4)$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{P(x) = \frac{20}{3}x - 3x^2 + \frac{1}{3}x^3}}$$

Exercice 02

Soient les points suivants :(0, 0), (1, 2), (2, 36) et (3, 252).

1. Obtenir le polynôme de Lagrange passant par les trois premiers points.
2. Obtenir le polynôme de Lagrange passant par les quatre points.

Solution :

$\boxed{1}$ L'équation de la parabole passant par $(0,0)$, $(1,2)$ et $(2,36)$:

$$P_2(x) = \begin{cases} y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ + y_1 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ +2 \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \\ +36 \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x) = 16\,x^2 - 14\,x}$$

$\boxed{2}$ L'équation du polynôme (de degré trois) passant par tous les points :

$$P_3(x) = \begin{cases} y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\ +y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ +y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ +y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ +2 \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\ +36 \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \\ +252 \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x) = 25\,x^3 - 59\,x^2 + 36\,x}$$

<u>Exercice 03</u>

Déterminer le polynôme d'interpolation de la fonction $f(x) = |x|$ dont on connait les valeurs aux abscisses dans la base de Lagrange et de Newton.

$\mathbf{x_i}$	-1	-1/2	0	1/2	1

Solution :

$$f(x) = |x|$$

x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x_i)=\lvert x\rvert$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

La base de Lagrange :

$$\begin{cases} L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(-1+\frac{1}{2}\right)(-1-0)\left(-1-\frac{1}{2}\right)(-1-1)} = \frac{2x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{3} \\ L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = \frac{(x+1)(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(-\frac{1}{2}-0\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)} = -\frac{8x(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{3} \\ L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = \frac{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{(0+1)\left(0+\frac{1}{2}\right)\left(0-\frac{1}{2}\right)(0-1)} = \frac{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{4} \\ L_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = \frac{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-0)(x-1)}{\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)} = -\frac{8x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)}{3} \\ L_4 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \frac{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)(1-0)\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3} \end{cases}$$

$$P(x) = a_0L_0(x) + a_1L_1(x) + a_2L_2(x) + a_3L_3(x) + a_4L_4(x)$$

$$\Leftrightarrow P(x) = L_0(x) + \frac{1}{2}L_1(x) + 0.L_2(x) + \frac{1}{2}L_3(x) + L_4(x) \Rightarrow \boxed{P(x) = \frac{4}{3}x^2\left(\frac{7}{4} - x^2\right)}$$

La base de Newton :

$x_0=-1$	$f[x_0]=1$	$f[x_0,x_1]=\frac{-0,5}{-0,5+1}=-1$	$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{-1+1}{0+1}=0$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{2-0}{0,5+1}=\frac{4}{3}$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}}{1+1}=-\frac{4}{3}$
$x_1=-\frac{1}{2}$	$f[x_1]=\frac{1}{2}$	$f[x_1,x_2]=\frac{-0,5}{0+0,5}=-1$	$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{1+1}{0+1}=2$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{0-2}{1+0,5}=-\frac{4}{3}$	
$x_2=0$	$f[x_2]=0$	$f[x_2,x_3]=\frac{0,5}{0,5}=1$	$f[x_2,x_3,x_4]=\frac{1-1}{1-0}=0$		
$x_3=\frac{1}{2}$	$f[x_3]=\frac{1}{2}$	$f[x_3,x_4]=\frac{0,5}{0,5}=1$			
$x_4=1$	$f[x_4]=1$				

$$P(x) = 1 - (x-x_0) + 0(x-x_0)(x-x_1) + \frac{4}{3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) - \frac{4}{3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$= 1 - (x+1) + 0(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3}(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-0) - \frac{4}{3}(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

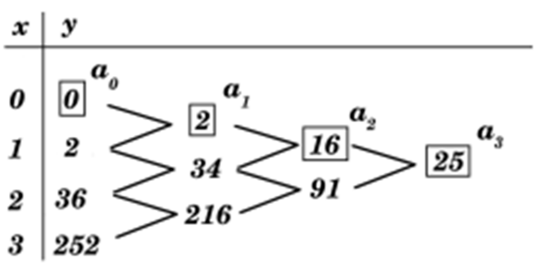
$$\Rightarrow \boxed{P(x) = \frac{4}{3}x^2\left(\frac{7}{4} - x^2\right)}$$

Exercice 04

Reprendre les mêmes questions de l'exercice (02) avec la méthode de Newton.

Solution :

La table des différences divisées des quatre points :



$\boxed{1}$ L'équation de la parabole passant par $(0,0)$, $(1,2)$ et $(2,36)$:

$$P_2(x) = \begin{cases} a_0 \\ +a_1(x-x_0) \\ +a_2(x-x_0)(x-x_1) \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ +2\ (x-0) \\ +16(x-0)(x-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x) = 16\,x^2 - 14\,x}$$

$\boxed{2}$ Le polynôme du troisième degré passant par les quatre points :

$$P_3(x) = \begin{cases} & 0 \\ + & 2(x-0) \\ + & 16(x-0)(x-1) \\ + & 25\,(x-0)(x-1)(x-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x) = 25\,x^3 - 59\,x^2 + 36\,x}$$

A. HAMANE