TABLE DES MATIÈRES

Ce résumé de cours d'équations aux différences est destiné aux étudiants de la deuxième année Master Anal. Fonct. Je note que le résumé n'est pas dans sa forme finale, il va être complété et révisé (corrigé) aufur et à mesure.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous présontons quelques définitions utiles pour la suite de ce cours.

1.1 Definitions

Définition 1.1.1 *On appel équation aux différences non autonome d'ordre k toute équation de la forme*

$$x_{n+1} = f(n, x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k+1}),\ n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.1}$$

avec $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, ..., n_0 \text{est un entier natural}\}$, $f : \mathbb{N} \times E^k \to E$ *est une fonction continue (il suffit qu'elle soit définie), E une partie de* $\mathbb{R}$ *et* $y_{n_0-k+1}, y_{n_0-k+2}, ..., y_{n_0} \in E$ *sont les valeurs initiales.*
Si équation (1.1) *prend la forme*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k+1}),\ n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.2}$$

i.e., $f : E^k \to E$*, ne dépend pas de* n*, on dit que* (1.2) *est équation aux différences autonome d'ordre* k*.*

Définition 1.1.2 *Une solution de léquation aux différences* (1.1) *est suite* $\{x_n\}_{n \geq n_0-k} \subset E$ *qui satisfait cette équation.*

Remarque 1.1.1 ***(Existence et unicité de la solution)*** *Fixons dans* E *les valeurs initiales* $x_{n_0-k+1}, x_{n_0-k+2}, ..., x_{n_0}$*. Alors, l'équation* (1.1) *admet une et une seule solution* $\{x_n\}_{n \geq n_0-k}$*.*

Définition 1.1.3 ***(Equation aux différences linéaire)*** *Lorsque l'équation* (1.1) *prend la forme*

$$x_{n+1} + p_1(n)x_n + \ldots + p_k(n)x_{n-k+1} = g(n) \tag{1.3}$$

i.e., $f(n, x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k+1}) = -p_1(n)x_n - \ldots - p_k(n)x_{n-k+1} + g(n)$ *où* $p_1(n), \ldots, p_k(n), g(n)$ *sont des fonctions réelles définies sur* $\mathbb{N}_{n_0}$ *et* $p_k(n) \neq 0$*,* $n \geq n_0$*, on dit que* (1.3) *est une équation aux différences linéaire d'ordre* k*. Lorsque* $g \equiv 0$*, l'équation* (1.3) *prend la forme*

$$x_{n+1} + p_1(n)x_n + \ldots + p_k(n)x_{n-k+1} = 0. \tag{1.4}$$

L'équation (1.4) *est dite homogène.*

Remarque 1.1.2 *Généralement on définit une équation aux différences linéaire comme suit*

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = g(n) \tag{1.5}$$

dans ce cas les valeurs initiales seront $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_0+k-1}$*. Il est claire que les deux écriture* (1.3) *et* (1.5) *se ramène l'une à l'autre (décalge d'indices).*

1.2 Solutions périodiques

Définition 1.2.1 ***(Solution périodique)*** *Une solution* $\{x_n\}_{n \geq n_0-k}$ *de l'équation aux différence* (1.1) *est dite eventuellemnt périodique de période* $p \in \mathbb{N}$*, s'il existe* $n_1 \geq n_0 - k : n_{n+p} = x_n$*,* $n \geq$

n_1. *Lorsque* $n_1 = n_0 - k$, *la solution* $\{x_n\}_{n \geq n_0 - k}$ *est dite périodique.*

Exemple 1.2.1 *Considérons l'équation aux différences*

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n}, \, n = 0, 1, \ldots, \tag{1.6}$$

avec $x_0 \in \mathbb{R}^*$. *Il est claire que la solution est périodique de période 2. En effet,*

$$x_{n+2} = \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{x_n}} = x_n, \, \forall n \geq 0.$$

est la solution prend la forme

$$\{x_n\}_{n \geq 0} = \{x_0, \frac{1}{x_0}, x_0, \frac{1}{x_0}, \ldots\}.$$

1.3 Points d'équilibre et oscillation des solutions

Définition 1.3.1 *Un point d'équilibre de l'équation aux différences* (1.1) *est un nombre* $\overline{x} \in E$ *telque*

$$f(n, \overline{x}, \overline{x}, ..., \overline{x}) = \overline{x}.$$

Exemple 1.3.1 *L'équation* (1.6) *admet deux points d'équilibre* -1 *et* 1, *solutions dans* $\mathbb{R}^*$ *de l'équation*

$$\overline{x} = \frac{1}{\overline{x}}.$$

L'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{2^n + x_n^2}{2^2 + x_{n-1}^2}, \, n = 0, 1, \ldots,$$

avec x_{-1}, $x_0 \in \mathbb{R}^+$ *a* $\overline{x} = 1$ *comme seul point d'équlibre, solution dans* $\mathbb{R}^+$ *de l'équation*

$$\overline{x} = \frac{2^n + \overline{x}^2}{2^2 + \overline{x}^2}$$

.

Définition 1.3.2 *(**Solution non-oscillatoire**) Une solution* $\{x_n\}_{n\geq n_0-k}$ *de l'équation aux différence* (1.1) *est dite non-oscillatoire autour du point d'équilibre* $\overline{x}$*, s'il existe* $n_1 \geq n_0 - k$ *telque, soit on a*

$$x_n \geq \overline{x},\ \forall n \geq n_1,$$

ou bien on a

$$x_n \leq \overline{x},\ \forall n \geq n_1.$$

Autrement la solution $\{x_n\}_{n\geq n_0-k}$ *est dite oscillatoire autour du point d'équilibre* $\overline{x}$*.*

CHAPITRE 2

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES LINÉAIRES

2.1 Résultats généraux

Considérons l'équation aux différences linéaire d'ordre k (1.5) avec $g \equiv 0$, i.e.,

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = 0. \tag{2.1}$$

Théorème 2.1.1 *L'ensemmble S des solutions de l'équation aux différences* (2.1) *est un* : $\mathbb{R}$-*espace vectoriel de dimension k.*

Preuve. On a $S = \{x = (x_n)_{x \geq n_0}, x_i \in \mathbb{R} : x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = 0.\}$.

$$S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots),\ u_i \in \mathbb{R}\}.$$

On note que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es doté des deux opérations notées "+" et "." définies par

- $(x_n)_{n\geq n_0} + (y_n)_{n\geq n_0} = (x_n + y_n)_{n\geq n_0}$,
- $\lambda.(x_n)_{n\geq n_0} = (\lambda x_n)_{n\geq n_0},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

On a $S \neq \phi$, de plus il est facile de voir que S est sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Il nous reste de déterminer sa dimension. Pour cela considérons l'application linéaire (homomorphisme d'espaces véctoriels.

$$\begin{aligned} \varphi : \ S &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ x &\longmapsto \varphi(x) = (x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_0+k-1}) \end{aligned}$$

avec

$$\mathbb{R}^k = \{(v_0, v_1 v \ldots, v_{k-1}), v_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

On a

$$\begin{aligned} ker(\varphi) &= \{x \in S : \varphi(x) = 0_{\mathbb{R}^k}\} \\ &= \{x \in S : (x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_0+k-1}) = (0, 0, \ldots, 0)\} \\ &= \{x \in S : x_{n_0} = 0, x_{n_0+1} = 0, \ldots, x_{n_0+k-1} = 0\}. \end{aligned}$$

Mais tous les termes $x_n, n \geq n_0+k$ s'écrivent en fonction des valeurs initiales $x_{n_0+k-1}, x_{n_0+k-2}, \ldots, x_{n_0}$, ainsi on aura

$$\begin{aligned} ker(\varphi) &= \{x \in S : x_n = 0, \forall n \geq n_0\} \\ &= \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}. \end{aligned}$$

Ainsi on a démonté l'injectivité de φ. Soit $(c_1, c_2, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$, et considérons la suite$(x_n)_{n\geq n_0}$ de S avec

$$x_{n_0} = c_1, x_{n_0+1} = c_2, \ldots, x_{n_0+k-1} = c_k, x_{n+k} = -p_1(n)x_{n_+k-1} - \cdots - p_k(n)x_n, n \geq n_0.$$

Il en résulte que

$$\varphi((x_n)_{n\geq n_0}) = (c_1, c_2, \dots, c_k),$$

ce qui montre la surjectivité de φ. Il s'en suit que $\mathbb{R}^k$ et S sont isomorphes et donc $dim(S) = k$. ■

Théorème 2.1.2 *L'ensemble* $A = \left\{(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \dots, (x_n^k)_{n\geq n_0}\right\}$ *des solutions de l'équation aux différences* (2.1) *est libre (base pour* S*, puisque elle contient k éléments) si et seulement si* $W(n) \neq 0, \forall n \geq n_0$*, avec*

$$W(n) = det\begin{pmatrix} x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^k \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+k-1}^1 & x_{n+k-1}^2 & \dots & x_{n+k-1}^k \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.1.3 $W(n)$ *s'appel le Casoratien, qui est l'analogue discret du Woronskien.*

Preuve. Supposons que

$$\alpha_1(x_n^1) + \alpha_2(x_n^2) + \dots + \alpha_k(x_n^k) = 0, \quad \forall n \geq n_0$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Il s'en suit que

$$\begin{cases} \alpha_1 x_n^1 + \alpha_2 x_n^2 + \dots + \alpha_k x_n^k = 0, \\ \alpha_1 x_{n+1}^1 + \alpha_2 x_{n+2}^2 + \dots + \alpha_k x_{n+1}^k = 0, \\ \vdots \\ \alpha_1 x_{n+k-1}^1 + \alpha_2 x_{n+k-1}^2 + \dots + \alpha_k x_{n+k-1}^k = 0, \end{cases}$$

Ce système s'écrit de la manière équivalente $X(n).\alpha = 0$ où

$$X(n) = \begin{pmatrix} x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^k \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+k-1}^1 & x_{n+k-1}^2 & \dots & x_{n+k-1}^k \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow det X(n) = W(n) \neq 0, \quad \forall n \geq n_0.$$

■

Définition 2.1.1

Un ensemble libre de k solutions de (2.1) *est dit ensemble fondamentale des solutions.*

Exemple 2.1.1 — *L'ensemble* $A_1 = \{(2^n)_{n\geq 0}, (3^n)_{n\geq 0}\}$ *est une base base des solution de l'équation aux différences*

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0, \; n = 0, 1, \cdots .$$

On a

$$\begin{aligned} W(n) &= det \begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 2^n & 3^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= 2^n.3^n \neq 0, \; \forall n = 0, 1, \cdots . \end{aligned}$$

Ainsi toute solution s'écrit pour tout $n = 0, 1, \cdots,$

$$x_n = c_1 2^n + c_2 3^3.$$

— *L'ensemble* $A_2 = \{(n)_{n\geq 2}, (2^n)_{n\geq 2}\}_{n\geq 2}$ *est une base base des solution de l'équation aux différences*

$$x_{n+2} - \frac{3n-2}{n-1} x_{n+1} + \frac{2n}{n-1} x_n = 0, \quad n \geq 2.$$

En effet

On a

$$\begin{aligned} W(n) &= det\begin{pmatrix} n & 2^n \\ n+1 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= (n-1)2^n \neq 0,\ \forall n = 2,3,\cdots, \end{aligned}$$

et toute solution s'écrit pour tout $n = 2,3,\cdots,$

$$x_n = c_1 2^n + c_2 3^3.$$

Question : Existe t-il toujours un ensemble fondamentale de solutions pour l'équation aux différences linéaire homogène (2.1) ?.
Le théorème suivant donne une réponse affirmative à cette question.

Théorème 2.1.4 *Si* $p_k(n) \neq 0, \forall n \geq n_0$, *alors pour l'équation aux différences linéaire homogène* (2.1) *on a toujours un ensemble fondamentale de solutions.*

Avant de donner la démonstration de ce théorème, rappelons la formule d'Abel du Casoratien.

Lemme 2.1.1 ***Lemme d'Abel*** *: Supposons que* $\left\{(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \ldots, (x_n^k)_{n\geq n_0}\right\}$ *sont des solutions de* (2.1), *alors* $\forall n \geq n_0$ *on a*

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)}\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i)\right)W(n_0). \tag{2.2}$$

Remarque 2.1.5 *Il résult de ce lemme que*

$$W(n) \neq 0,\ n \geq n_0 \Leftrightarrow W(n_0) \neq 0.$$

Preuve. Considérons les solutions

$$\left\{(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \ldots, (x_n^k)_{n\geq n_0}\right\},$$

obtenues à partir des valeurs initiales suivantes

$$\begin{aligned}
x_{n_0}^1 &= 1, x_{n_0+1}^1 = x_{n_0+2}^1 = \cdots = x_{n_0+k-1}^1 = 0,\\
x_{n_0}^2 &= 0, x_{n_0+1}^2 = 1, x_{n_0+2}^2 = \cdots = x_{n_0+k-1}^1 = 0,\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
x_{n_0}^k &= x_{n_0+1}^k = \cdots = x_{n_0+k-2}^k = 0, x_{n_0+k-1}^k = 1.
\end{aligned}$$

On a

$$W(n_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

■

Remarque 2.1.6 1. *Supposons*

$$\left\{(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \ldots, (x_n^k)_{n\geq n_0}\right\}$$

sont des solutions de l'équation (2.1)*, il est facile de voir que toute combinaison linéaire de la forme*

$$x_n = a_1 x_n^1 + a_2 x_n^2 + \ldots + a_k x_n^k$$

est aussi solution de (2.1).

2. *Si* $\left\{(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \ldots, (x_n^k)_{n\geq n_0}\right\}$ *un ensemble fondamentale de solutions de l'équation* (2.1)*. Alors la solution générale de* (2.1) *s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de la base, i.e.,*

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_n^i.$$

3. *Supposons que* $(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}$ *sont deux solutions de l'équation* (1.5)*, alors* $(x_n)_{n\geq n_0} =$

$(x_n^1 - x_n^2)_{n\geq n_0}$ est une solution de l'équation (2.1) et il en résulte que le temrme général de la solution générale de l'équation (1.5) s'écrit

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_n^i + x_n^p, \quad n \geq n_0,$$

avec $(\sum_{i=1}^{k} a_i x_n^i)_{n\geq n_0}$ la solution générale de (2.1), $(x_n^p)_{n\geq n_0}$ une solution particulière de (1.5) et $\left\{(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \ldots, (x_n^k)_{n\geq n_0}\right\}$ est un ensemble fondamentale de solutions de l'équation (2.1).

2.2 Application à la résolution des équations aux différences linéaires à coefficients constants

Considérons l'équation aux différences lineaire homogène à coefficients constants suivante, cas particulier de l'équation (2.1),

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + p_2 x_{n+k-2} + \cdots + p_k x_n = 0,\ n \in \mathbb{N} \tag{2.3}$$

La résolution de cette équation revient donc à trouver une base pour S l'ensemble des solution, i.e., un ensemble fondamentale de solutions. Cela est possible grace au résultat suivant.

Lemme 2.2.1 *Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors*

$$(x(n))_{n\geq 0} = (\lambda^n)_{n\geq 0}$$

sera solution de (2.3), s'il est racine du polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \ldots + p_{k-1}\lambda + p_k. \tag{2.4}$$

Preuve. Supposons que $(x(n))_{n\geq 0} = (\lambda^n)_{n\geq 0}$ est solution de (2.3), il s'en suit que En remplaçant par $x(n) = \lambda^n$ dans l'équation (2.3), on trouve

$$\lambda^n \left(\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + ... + p_{k-1}\lambda + p_k\right) = 0,$$

et comme $\lambda \neq 0$, on obtient puisque

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + ... + p_{k-1}\lambda + p_k = 0.$$

■

Remarque 2.2.1 *Le polynôme*

$$P(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + ... + p_{k-1}\lambda + p_k$$

s'appel polynôme caractéristique associé à l(équation aux différences (2.3). *En D'aprés le théorème de d'Almbert ce polynôme à k racines, comptés avec leurs multiplicité, dans . Ainsi, on va construire un ensemble fondamentale de solutions pour l'équation* (2.3) *à l'aide de ces racines et cela en se basant sur le lemma précédent.*

On a les deux résultats suivants.

Théorème 2.2.2
Supposons que les racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ du polynôme caractéristique $P(\lambda)$ sont distinctes deux à deux, alors $\left\{(\lambda_1^n)_n, (\lambda_2^n)_n, \ldots, (\lambda_k^n)_n\right\}$ forme une base pour S l'ensemble des solution de l'équation (2.3), *et toute solution de* (2.3) *s'écrit :*

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i\lambda_i^n, \ c_i \text{ sont des constantes.}$$

Preuve. Pour l'ensemble $\left\{(\lambda_1^n)_n, (\lambda_2^n)_n, \ldots, (\lambda_k^n)_n\right\}$, on a :

$$W(n) = det\begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_k^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & \cdots & \lambda_k^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n+k-1} & \lambda_2^{n+k-1} & \cdots & \lambda_k^{n+k-1} \end{pmatrix}.$$

On a

$$W(n) = (\lambda_1\lambda_2...\lambda_k)^n det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} = (\lambda_1\lambda_2...\lambda_k)^n \prod_{i>j, i,j=1,\ldots,k} (\lambda_i - \lambda_j)$$

ainsi,

$$W(n) \neq 0, \; \forall n.$$

Donc $\left\{(\lambda_1^n)_n, (\lambda_2^n)_n, \ldots, (\lambda_k^n)_n\right\}$ est libre et donc forme une base de S. ■ Pour le cas où les racines sont à multiplicité, on le résultat suivant.

Théorème 2.2.3 *Supposons que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, $r < k$ sont les racines du polynôme caractéristique associé à l'équation* (2.3) *avec leurs les multiplicitées $m_1, m_2, \ldots, m_r$ telque ($\sum_{i=1}^r m_i = k$). Alors l'ensemble*

$$\Big\{(\lambda_1^n)_n, (n\lambda_1^n)_n, \ldots, (n^{m_1-1}\lambda_1^n)_n, (\lambda_2^n)_n, (n\lambda_2^n)_n, \ldots, (n^{m_2-1}\lambda_2^n)_n, \cdots$$

$$(\lambda_r^n)_n, (n\lambda_r^n)_n, \ldots, (n^{m_r-1}\lambda_r^n)_n, \Big\}$$

forme une base pour S, et dans ce cas toute solution de (2.3) *s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de la base.*

Exemple 2.2.1 *Résoudre les équations aux différences suivantes*

1.

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0,\ n = 0, 1, ...,$$

Cette équation à comme polynôme caractéristique, le polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 4$$

Comme les racines de $P(\lambda)$ *sont* $\lambda_1 = 1$ *et* $\lambda_2 = -4$, *il s'ensuit que*

$$x_n = c_1(1)^n + c_2(-4)^n = c_1 + c_2(-4)^n,\ n = 0, 1, \cdots .$$

Si on veut écrire c_1 *et* c_2 *en fonction de* x_0 *et* x_1, *il suffit de résoudre le système :*

$$x_0 = c_1 + c_2,\ x_1 = c_1 - 4c_2.$$

2.

$$x_{n+3} - 4x_{n+2} + \frac{13}{4}x_{n+1} - \frac{3}{4}x_n = 0,\ n = 0, 1, ...$$

Le polynôme caractéristique de cette équation est

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + \frac{13}{4}\lambda - \frac{3}{4},$$

ces racines sont $\lambda_1 = 3$ *et* $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ *qui est double et donc*

$$x_n = c_1(3)^n + (c_2 + c_3 n)\left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

De même si on veut écrire les constantes en fonction des valeurs initiales il suffit de résoudre le système Pour trouver les constantes c_1, c_2 *et* c_3 *on résoudre le système*

$$\begin{cases} x_0 = & c_1 + c_2 \\ x_1 = & 3c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_3 \\ x_2 = & 9c_1 + \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{2}c_3 \end{cases}$$

Résolution de l'équation non homogène

Considérons l'équation aux différences linéares non homogène a coefficients constants

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + p_2 x_{n+k-2} + \cdots + p_k x_n = g(n). \tag{2.5}$$

Toute solution s'écrit comme somme de la solution de l'équation homogène (2.3) plus une solution particulière de l'équation non homogène (2.5). Je présente ici une procédure qui permet de choisir, dans des cas bien précis suivant l'expression de $g(n)$, la forme d'une solution particulière.

1. $g(n) = P(n)\alpha^n$, P un polynôme. Dans ce cas il suffit de de choisir une solution particulière $(x_n^P)_n$ sous la forme $x_n^P = n^m Q(n)\alpha^n$ avec Q un polynôme de même degré que P et $m = 0$ si α n'est pas racine du polynôme caractéristique associé à l'équation homogène. Si α est racine du polynôme caractéristique, m sera la multiplicitée de α.

2. $g(n) = P(n)cos(\beta n)\alpha^n$, $P(n)sin(\beta n)\alpha^n$, P un polynôme. Dans ce cas il suffit de de choisir une solution particulière $(x_n^P)_n$ sous la forme

   $$x_n^P = n^m \left[Q(n)cos(\beta n) + R(n)sin(\beta n)\right]\alpha^n$$

   avec Q, R sont des polynômes de même degré que P et $m = 0$ si α n'est pas racine du polynôme caractéristique associé à l'équation homogène. Si α est racine du polynôme caractéristique, m sera la multiplicitée de α.

Exemple 2.2.2 *Considérons l'équation aux différences*

$$x_{n+2} - 4x_n = (n-1)2^n, \ n = 0, 1, \cdots.$$

Cette équation à comme polynôme caractéristique, le polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4$$

et qui a comme racines -2, 2. *Donc la solution générale de l'équation homogène*

$$x_{n+2} - 4x_n = 0$$

est

$$x_n^H = c_1(-2)^n + c_2(2)^n.$$

Dans le second membre $\alpha = 2$ *est racine simple du polyôme caractéristique, ainsi on choisit une solution particulieèere de la forme*

$$x_n^P = n(an + b)2^n.$$

En remplacant dans notre équation, on obtient aprés simplification $a = \frac{1}{16}$, $b = -\frac{1}{4}$. *Donc*

$$x_n^P = n(\frac{5}{16}n - \frac{1}{6})2^n.$$

Ainsi

$$x_n = c_1(-2)^n + c_2(2)^n + n(\frac{1}{16}n - \frac{1}{4})2^n.$$

2.2.1 Stabilité des solutions d'une quation aux différences linéaire

Définition 2.2.1
1. *Une solution* $(\overline{x}_n)_n$ *de l'équation* (2.3) *est dite stable, si pour toute autre solution* $(x_n)_n$ *de* (2.3)*, la suite* $(x_n - \overline{x}_n)_n$ *est bornée. Sinon,* $(\overline{x}_n)_n$ *est dite instable.*
2. *Une solution* $(\overline{x}_n)_{n\geq n_0}$ *de l'équation* (2.3) *est dite asymptotiquement stable, si pour toute autre solution* $(x_n)_n$ *de l'équation* (2.3)*, on a*

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - \overline{x}_n) = 0.$$

Pour étudier la stabilité des solutions de l'équation aux différences (2.3), on se sert du résultat suivant.

Théorème 2.2.4 *Soit* $(\overline{x}_n)_n$ *une solution de l'équation* (2.3)*. Alors,*

1. $(\overline{x}_n)_n$ *est asymptotiquement stable si et seulement si tous les racines du polynôme caractéristique sont de modules* < 1.
2. $(\overline{x}_n)_n$ *est stable si et seulement si tous les racines du polynôme caractéristique sont de modules* ≤ 1 *avec ceux de module 1 sont des racines simple.*

CHAPITRE 3

EQUATIONS ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES NON LINEAIRES

Ce chapitre est consacré aux équations et systèmes d'équations aux différences non linéaire.
Considérons l'équation aux différences (non linaire) autonôme

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k+1}),\ n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

avec $f : E^k \to E$. Posons

$$X_n = (x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k+1})^t,\ n = 0, 1...,$$

on obtient

$$X_{n+1} = (x_{n+1}, x_n, ..., x_{n-k+2})^t = (f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k+1}), x_n, ..., x_{n-k+2})^t.$$

Considérons la fonction

$$F : E^k \to E^k$$

définit par :

$$F(u_1, u_2, ..., u_k) = (f(u_1, u_2, ..., u_k), u_1, ..., u_{k-1})^t.$$

Alors l'équation (3.1) prend la forme vectorielle

$$X_{n+1} = F(X_n),\ n = 0, 1, \cdots.$$

Définition 3.0.1 *Un système de deux d'équations aux différences non autonôme d'ordre k est un système de la forme*

$$\begin{cases} x_{n+1} = & f(n, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}) \\ y_{n+1} = & g(n, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}) \end{cases} \tag{3.2}$$

où $f, g : \mathbb{N} \times E^{2k} \to E$ sont des fonctions continues, E une partie de $\mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $(x_0, x_{-1}, ..., x_{-k+1}, y_0, y_{-1}, ..., y_{-k+1}) \in E^{2k}$ sont les valeurs initiales.

Remarque 3.0.1

1. *Lorsque f, g ne depend pas de n le système* (3.2) *est dit autonôme.*
2. *Le système est dit lineaire lorsque f et g s'écrivent respectivement*

$$p_0x_n + p_1x_{n-1} + ... + p_{k-1}x_{n-k+1} + q_0x_n + q_1x_{n-1} + ... + q_{k-1}x_{n-k+1} + \alpha(n),$$

respectivement

$$r_0x_n + r_1x_{n-1} + ... + r_{k-1}x_{n-k+1} + s_0x_n + s_1x_{n-1} + ... + s_{k-1}x_{n-k+1} + \beta(n),$$

les fonctions p_i, q_i, r_i, s_i, α, β sont des fonctions réels.

Considérons le sytème autonôme

$$\begin{cases} x_{n+1} = & f\left(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}\right) \\ y_{n+1} = & g\left(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}\right) \end{cases} \tag{3.3}$$

avec $f, g : E^{2k} \to E$. Comme dans le cas d'une équation ce système paut s'écrire sous la forme d'une équation aux différences véctorielle d'ordre 1. Pour des raisons de simplicité, on va montrer comment obtenir l'équation véctorielle sur un example simple.

Considérons le sytème autonôme

$$\begin{cases} x_{n+1} = & f\left(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}\right) \\ y_{n+1} = & g\left(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}\right) \end{cases} \tag{3.4}$$

$$X_n = (x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1})^t,\ n = 0, 1...,$$

on obtient

$$X_{n+1} = (x_{n+1}, x_n, y_{n+1}, y_n)^t = (f(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}), x_n, g(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}, y_n)^t.$$

Considérons la fonction

$$F : E^4 \to E^4$$

définit par :

$$F(u_1, u_2, v_1, v_2) = (f(u_1, u_2, v_1, v_2), u_1, g(u_1, u_2, v_1, v_2), v_1)^t.$$

Ainsi la forme vectorielle est donnée par

$$X_{n+1} = F(X_n),\ n = 0, 1, \cdots.$$

Considérons l'équation aux différence vectorielle d'ordre 1 donnée par

$$X_{n+1} = F(X_n),\ n = 0, 1, \cdots \tag{3.5}$$

avec $F : E^k \to E^k$ est une fonction continue.
Soit $\overline{X} \in E^k$ un point d'équilibre (point fixe) de (3.5), i.e., solution de $X = F(X)$.

Définition 3.0.2
1. *Le point d'équilibre $\overline{X}$ est dit stable (ou localement stable) si $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\| X_0 - \overline{X} \| < \delta \Rightarrow \| X_n - \overline{X} \| < \epsilon$ pour $n \geq 0$. Sinon le point $\overline{X}$ est dit instable.*
2. *Le point d'équilibre $\overline{X}$ est dit asymptotiquement stable (ou localement asymptotiquement stable) s'il est stable, et s'il existe $\gamma > 0$ tel que $\| X_0 - \overline{X} \| < \gamma \Rightarrow X_n \to \overline{X}$, $n \to +\infty$.*
3. *Le point d'équilibre $\overline{X}$ est dit globalement attractif, si $\forall\ X_0 \in E^k$ on a*

$$X_n \to \overline{X},\ n \to +\infty.$$

4. *Le point d'équilibre $\overline{X}$ est dit globalement stable (globalement asymptotiquement stable) s'il est stable et globalement attractif.*

$\| . \|$ est une norme convenable.

Le théorème suivant est indispensable pour l'étude de la stabilité des points d'équilibre.
Soit J_F la matrice jacobienne de la fonction F en le point d'équilibre $\overline{X}$.

Théorème 3.0.2 *(Stabilité par linéarisation de Lyapunov)*

1. *Supposons que toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne J_F sont de modules < 1, alors le point d'équilibre $\overline{X}$ est asymptotiquement stable.*
2. *Supposons qu'il existe une valeur propre de la matrice Jacobienne J_F avec le module > 1, alors le point d'équilibre $\overline{X}$ est instable.*