Université de Jijel
Faculté des sciences et de la technologie
1 er année ST 2022/2023
Matière: Physique 2: Electricité et Magnétisme
Série de TD N° 03

Exerecice 1:

1) Calculer le champ électrostatique E sur le plan infini qui est chargé positivement surfaciques $(\sigma \geq 0)$ a l'aid de théorème de Gauss.

2) Soient deux cylindres conducteurs coaxiaux, de rayon R_1 pour la premier et R_2 pour la deuxième et de meme hauteur h, les deux cylindres sont chargés avec les densités surfaciques constantes positifs σ_1 et σ_2 respectivement.

2.1) Calculer l'expression du champ électrostatique E, dans les trois régions $r \leq R_1$, $R_1 \leq r \leq R_2$, et $r \geq R_2$ par l'utilisation de théorème de Gauss.

2.2) Déduire l'expression du potentiel électrostatique dans les régions $R_1 \leq r \leq R_2$, et $r \geq R_2$.

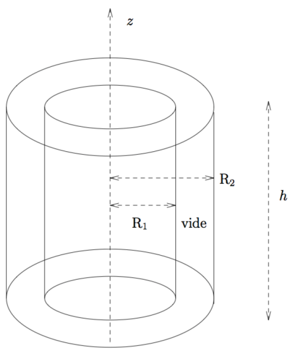

FIG. 1:

Solution de l'Exerecice 1:

1) Le calculer de champ électrostatique E sur le plan infini qui est chargé positivement surfaciques $(\sigma = Cte \geq 0)$ a l'aid de théorème de Gauss:

$$\Phi = \oiint \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}.$$

La surface de Gauss est choisie dans ce cas-là sous forme de cylindre, on sait que le cylindre est composé de deux bases $\overrightarrow{ds}_1$ et $\overrightarrow{ds}_2$ et la surface latérale $\overrightarrow{ds}_3$ et la distribution du champ a une symétrie de rotation , donc :

$$\Phi = \oiint \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{ds}_1 + \oiint \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{ds}_2 + \oiint \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{ds}_3 = ES_1 + ES_2 = 2ES. \qquad \oiint \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{ds}_3 = 0, puis\,que\ \ \overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{ds}_3$$

et ausssi $\overrightarrow{E} // \overrightarrow{ds}_1$, $\overrightarrow{E} // \overrightarrow{ds}_2$,$S_1 = S_2 = S$ et $E = Cte.$

d'autre part on

$$\Phi = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, S}{\varepsilon_0}.$$

puisque on a une distribution surfacique $\sigma = \frac{dq}{ds} \Rrightarrow \int dq = \int \sigma\, ds \Rrightarrow Q = \sigma\, S. \quad \sigma = Cte.$

Finalement, on trouve champ électrostatique

$$2ES = \frac{\sigma\, S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\, \epsilon_0}.$$

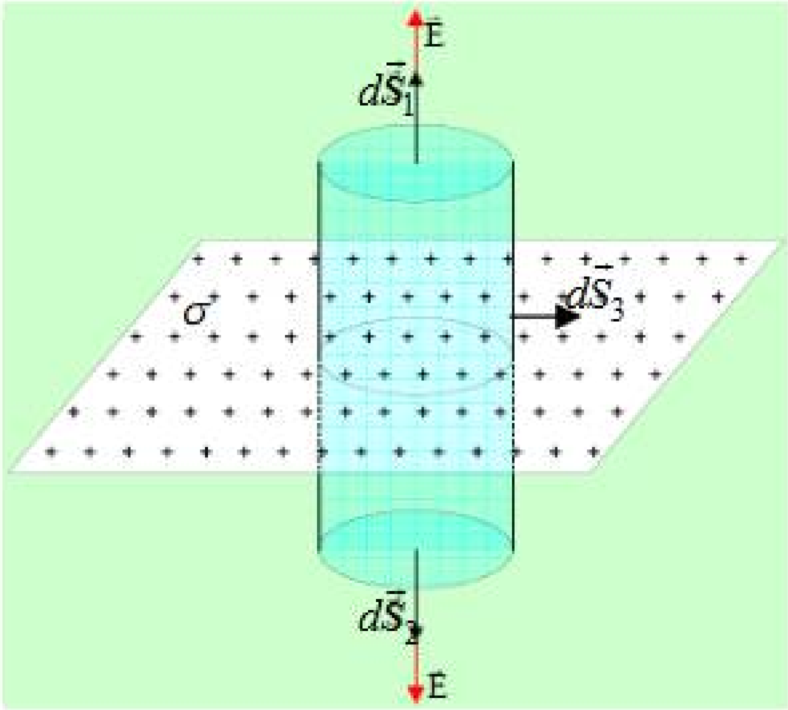

FIG. 2:

pour le vecteur de champ électrostatique :

$$\overrightarrow{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{k}, \ Z \geq 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{k}, \ Z \leq 0 \end{cases}$$

2.1) Calculer l'expression du champ électrostatique E, dans les trois régions $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, et $r > R_2$ par l'utilisation de théorème de Gauss

$$\Phi = \oiint \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}.$$

Région (1) : dans ce cas la surface de Gauss un cylindre de rayon $r < R_1$ coaxial avec les deux cylindres est comme $Q_{int} = 0$. danc $E = 0 \Rightarrow \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$.

Région (2) : dans ce cas la surface de Gauss un cylindre de rayon $R_1 < r < R_2$ coaxial avec les deux cylindres, composé de deux bases $\overrightarrow{ds}_1$ et $\overrightarrow{ds}_2$ et la surface latérale $\overrightarrow{ds}_3$:

$$\Phi = \oiint \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{ds}_1 + \oiint \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{ds}_2 + \oiint \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{ds}_3 = ES_3 = E\,2\pi r\,h. \qquad \oiint \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{ds}_{1,2} = 0, puis\,que \ \ \overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{ds}_{1,2}$$

et ausssi $\overrightarrow{E} // \overrightarrow{ds}_3$ et $E = Cte$.

d'autre part on

$$\Phi = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1\,S_3}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1\,2\pi R_1\,h}{\varepsilon_0}.$$

Danc

$$E = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0 r}, \quad \overrightarrow{E} = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0 r}\overrightarrow{U}_r.$$

Région (3) : la surface de Gauss un cylindre de rayon $r \geq R_2$.

$$\Phi = \oiint \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{ds}_1 + \oiint \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{ds}_2 + \oiint \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{ds}_3 = ES_3 = E\,2\pi r\,h. \qquad \oiint \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{ds}_{1,2} = 0, puis\,que\ \ \overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{ds}_{1,2}$$

et ausssi $\overrightarrow{E} // \overrightarrow{ds}_3$ et $E = Cte$.
d'autre part on

$$\Phi = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 2\pi R_1\,h + \sigma_2 2\pi R_2\,h}{\varepsilon_0} = \frac{(\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2)\,2\pi\,h}{\varepsilon_0}.$$

Danc

$$E = \frac{(\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2)}{\varepsilon_0 r}, \quad \overrightarrow{E} = \frac{(\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2)}{\varepsilon_0 r}\overrightarrow{U}_r.$$

2.2) Déduire l'expression du potentiel électrostatique dans les régions $R_1 < r < R_2$, et $r > R_2$.

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

pour la Région (2): $\overrightarrow{E} = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0 r}\overrightarrow{U}_r \Rightarrow V = -\int \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0 r}dr = -\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\,ln(r) + C_2$.
pour la Région (3): $\overrightarrow{E} = \frac{(\sigma_1 R_1+\sigma_2 R_2)}{\varepsilon_0 r}\overrightarrow{U}_r \Rightarrow V = -\int \frac{(\sigma_1 R_1+\sigma_2 R_2)}{\varepsilon_0 r}dr = -\frac{(\sigma_1 R_1+\sigma_2 R_2)}{\varepsilon_0}\,ln(r) + C_3$.

Exerecice 2:

Soient trois plans infinis, parallèles et équidistants. Ils portent des densités de charges superficielles σ, -2σ et σ respectivement (FIg.3).

1) En appliquant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique E créé par chaque plan.

2) En déduire le champ électrostatique E_T dans les régions 1, 2, 3 et 4.

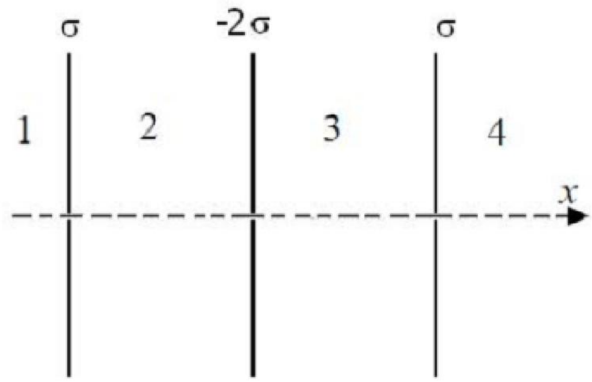

FIG. 3:

Solution de l'exerecice 3:

1) ON appliquant le théorème de Gauss, le champ électrostatique E créé par chaque plan est: (LA MÉTHODE EST EXPLIQUÉ DANS EXO1)

$E_1(\sigma) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ $\qquad E_2(2\sigma) = \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ $\qquad E_3(\sigma) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

la Région (1): $\overrightarrow{E}_T = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-\overrightarrow{i}\right) + \frac{-2\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-\overrightarrow{i}\right) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{0}$.

la Région (2): $\overrightarrow{E}_T = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(+\overrightarrow{i}\right) + \frac{-2\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-\overrightarrow{i}\right) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-\overrightarrow{i}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{i}$.

la Région (3): $\overrightarrow{E}_T = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(+\overrightarrow{i}\right) + \frac{-2\sigma}{2\varepsilon_0}\left(+\overrightarrow{i}\right) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-\overrightarrow{i}\right) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{i}$

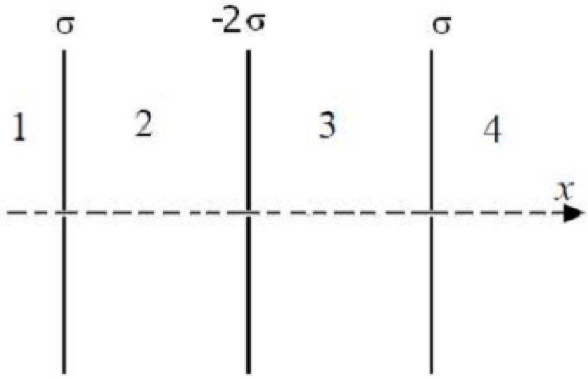

FIG. 4:

la Région (4): $\overrightarrow{E}_T = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(+\overrightarrow{i}\right) + \frac{-2\sigma}{2\varepsilon_0}\left(+\overrightarrow{i}\right) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(+\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{0}$.

Exerecice 3:

Une charge ponctuelle Q positif est placée au centre d'un conducteur sphérique creux initialement neutre et isolé. Les rayons intérieur et extérieur de ce conducteur sont respectivement R_1 et R_2 (figure 3).

1) Représenter en justifiant la répartition des charges sur le conducteur quand le système est à l'équilibre électrostatique.

2) Déterminer le champ électrique dans les trois régions $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ et $r > R_2$.

Solution de l'exerecice 3:

FIG. 5:

1) Représentation la répartition des charges sur le conducteur quand le système est à l'équilibre électrostatique:

pour la charge intérieure $Q_i = -Q$ (car influence totale) pour la charge extérieure $Q_e = -Q_i = Q$ (conservation de la charge).

2) Détermination de champ électrique dans les trois régions $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ et $r > R_2$.

La surface de Gauss est choisie dans ce cas-là sous forme d'une sphére.

$$\Phi = \oiint \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{ds} = E\,4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}.$$

pour la Région (1): $r < R_1$, $Q_{int} = Q \Rightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{k\,Q}{r^2}$.
pour la Région (2): $R_1 < r < R_2$, $Q_{int} = Q - Q = 0 \Rightarrow E = 0$.
pour la Région (3): $r > R_2 Q_{int} = +Q - Q + Q = +Q \Rightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{k\,Q}{r^2}$.

Exerecice 4:

Par l'intermédiaire d'une source de tension, une sphère conductrice (A) de rayon $R_1 = 0.10\,m$, est portée à un potentiel de $9\,V$, par rapport au sol, puis isolée.

1) Calculer la charge Q_A de A.

2) Quelle est l'énergie électrique E_P fournie par la source de tension lors de l'opération de la charge de (A).

Un deuxième conducteur (B), sphérique, de rayon $R_2 = 0.01\,m$ et initialement neutre, est placé à une distance $d = 10\,m$.

Le conducteur (A), déconnecté de la source, est relié à (B) par un fil conducteur très mince.

3) Déterminer la charge et la densité surfacique des charges électriques sur chacun des conducteurs (A) et (B).

4) Calculer son énergie interne et l'énergie électrique perdue, au cours de cette opération, par le système de conducteurs.

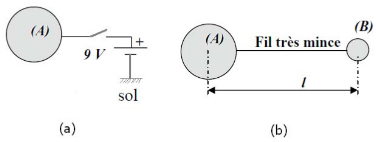

FIG. 6:

Solution de l'exerecice 4:

1) La charge Q_A de A est $V_A\,(0) = \frac{K\,Q_A}{R_A} \Rightarrow Q_A = \frac{R_A\,V_A(0)}{K} = \frac{9\times10^{-1}}{9\times10^{9}} = 10^{-10}\,(C)$.
2) l'énergie électrique $\triangle E_P = -W$.
$W\,(A) = Q_A\,V\,(A) = 10^{-10}\,9 = 9\times10^{-10}\,(j)$.
$\triangle E_P = -W. = -9\times10^{-10}\,(j)$
3) $Q'_A, Q'_B, \sigma_A, \sigma_B$
Q_A est l'encienne charge si la charge avant le contact
Q'_A est la nouvelle charge si la charge apres le contact.
le principe de conseravtion de charge assure que: $Q'_A + Q'_B = Q_A$ $(**)$
et aussi les conducteurs (A) et (B) ont le meme potentile:

$$V\,(A) \;=\; V\,(B)\,.$$

$$\frac{K\,Q'_A}{R_A} + \frac{K\,Q'_B}{d} \;=\; \frac{K\,Q'_A}{d} + \frac{K\,Q'_B}{R_B}.$$

$$\frac{Q'_A}{R_A} - \frac{Q'_A}{d} = \frac{Q'_B}{R_B} - \frac{Q'_B}{d} \quad .$$

$$Q'_A\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{d}\right) = Q'_B\left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{d}\right) \quad .$$

Puis que $d \gg 1 \Rightarrow \frac{1}{d} \to 0$
Danc la relation a la forme suivente

$$\frac{Q_A^{'}}{R_A} = \frac{Q_B^{'}}{R_B} \Rightarrow Q_A^{'} = \frac{R_A}{R_B}\, Q_B^{'}.$$

En remplace dans la relation (∗∗)

$$\frac{R_A}{R_B}\, Q_B^{'} + Q_B^{'} = Q_A \Rightarrow Q_B^{'} \left(\frac{R_A}{R_B} + 1\right) = Q_A \Rightarrow Q_B^{'} \left(\frac{R_A + R_B}{R_B}\right) = Q_A \Rightarrow Q_B^{'} = \frac{R_B}{R_B + R_A} Q_A$$

ET

$$Q_A^{'} = \frac{R_A}{R_B + R_A} Q_A$$

$$\begin{array}{l} Q_B^{'} = \frac{R_B}{R_B+R_A} Q_A \ \ = 9,1 \times 10^{-12}\,(C) \Rightarrow \sigma_B = \frac{Q_B^{'}}{S_B} = \frac{Q_B^{'}}{4\pi R_B^2}. \\ Q_A^{'} = \frac{R_A}{R_B+R_A} Q_A \ \ = 90,9 \times 10^{-12}\,(C) \Rightarrow \sigma_A = \frac{Q_A^{'}}{S_A} = \frac{Q_A^{'}}{4\pi R_A^2}. \end{array}$$

4) énergie interne et l'énergie électrique perdue, au cours de cette opération, par le système de conducteurs.

$$E = \frac{1}{2}\,C\,V^2 = \frac{1}{2}\,Q\,V = \frac{Q^2}{2C} \qquad C = 4\pi\varepsilon_0 R = \frac{R}{K}$$

$$E_{perdu} = E_f - E_i$$

l'énergie initiale

$$E_i = \frac{1}{2} Q_A\, V\,(A) = 4,5 \times 10^{-10}\,(j)$$

l'énergie finale

$$E_f = \frac{{Q'_A}^2}{2C_A} + \frac{{Q'_B}^2}{2C_B} = \frac{K{Q'_A}^2}{2R_A} + \frac{K{Q'_B}^2}{2R_B} \simeq 4 \times 10^{-10}\ (j)$$

$$E_{perdu} = E_f - E_i = -0.5 \times 10^{-10}\,(j)$$

Exerecice 5:

On considère le groupement de quatre condensateurs $C_1 = 3\,C$, $C_2 = C$, $C_3 = 2\,C$ et $C_4 = 3\,C$ (FIg.3).
1) Calculer, en fonction de C , la capacité équivalente C_{eq} entre A et B . On donne $C = 2\,\mu F$.
On maintient entre A et B une d.d.p $U_{AB} = 2 \times 10^3\,V$.
2) Calculer les charge Q_1 , Q_2 , Q_3 et Q_4 et les tensions U_1 , U_2 , U_3 et U_4 de chacun des condensateurs, en fonction de C et V_{AB}.

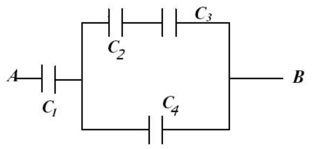

FIG. 7:

Solution de l'exerecice 5:

1) Le calcule, en fonction de C , la capacité équivalente C_{eq} entre A et B:

1/ C_2et C_3 en série, danc $\frac{1}{C'_{eq}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$, $C'_{eq} = \frac{C_2 C_3}{C_2+C_3} = \frac{C\,2C}{C+2C} = \frac{2C^2}{3C} = \frac{2}{3}C$

2/ C'_{eq}et C_4en paralelle, $C^{"}_{eq} = C'_{eq} + C_4 = \frac{2}{3}C + 3C = \frac{11}{3}C$

3/ C_1et $C^{"}_{eq}$ en série, danc la capacité équivalente C_{eq} entre A et B est $C_{eq} = \frac{C^{"}_{eq}\,C_1}{C^{"}_{eq}+C_1} = \frac{\frac{11}{3}C\,3C}{\frac{11}{3}C+3C} = \frac{33C^2}{20\,C} = \frac{33}{20}C.$

$$C_{eq} = \frac{33}{20}C = 3,3 \times 10^{-9}\,(F)\,.$$

2) Le calculer les charge Q_1 , Q_2 , Q_3 et Q_4 et les tensions U_1 , U_2 , U_3 et U_4 de chacun des condensateurs, en fonction de C et V_{AB}.

$$Q_{eq} = C_{eq}\,U = \frac{33}{20}C\,2000 = 3300\,C = 3300\ \times 2 \times 10^{-9} = 66 \times 10^{-7}\,(C)$$

Q_{eq}est la charge total fourni par d.d.p.

$Q_{eq} = Q_1 = Q"_{eq} = 3300\,C = 66 \times 10^{-7}\,(C)$ par ce que C_1et $C^{"}_{eq}$ en série.

C'_{eq}et C_4en paralelle, danc on a:

$$Q^{'}_{eq} + Q_4\ = Q"_{eq}\ \ et\ \ \ U^{'} = U_4$$

$U^{'}$ est la tension de C_2 et C_3.

$$U^{'} = U_4 \Rrightarrow \frac{Q_4}{C_4} = \frac{Q^{'}_{eq}}{C'_{eq}} \Rrightarrow Q_4 = \frac{C_4}{C'_{eq}}\,Q^{'}_{eq}$$

en remplace cette relation dans $Q^{'}_{eq} + Q_4 = Q"_{eq}$

on trouve $Q^{'}_{eq} + \frac{C_4}{C'_{eq}}\,Q^{'}_{eq} = Q"_{eq} \Rightarrow Q^{'}_{eq}\frac{C_4+C'_{eq}}{C'_{eq}} = Q"_{eq} \Rightarrow Q^{'}_{eq} = \frac{C'_{eq}}{C_4+C'_{eq}}Q"_{eq} = \frac{\frac{2}{3}C}{3C+\frac{2}{3}C}3300\,C = 600\,C = 12 \times 10^{-7}\,(C)$

Danc

$$Q^{'}_{eq} = Q_3 = Q_2 = 600\,C = 12 \times 10^{-7}\,(C)$$

$$Q_4 = \frac{C_4}{C'_{eq}}\,Q^{'}_{eq} = 2700C = 54 \times 10^{-7}\,(C)\,.$$

le calcule de tension:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \tfrac{Q_1}{C_1} = \tfrac{3300\,C}{3C} = 1100\ (V)\\
U_2 &= \tfrac{Q_2}{C_2} = \tfrac{600\,C}{C} = 600\ (V)\\
U_3 &= \tfrac{Q_3}{C_3} = \tfrac{600\,C}{2C} = 300\ (V)\\
U_4 &= \tfrac{Q_4}{C_4} = \tfrac{2700C}{3C} = 900\,(V)
\end{aligned}$$