

Série de TD N° 03
Systèmes d'équations linéaires

Exercice 1 Résoudre les systèmes d'équations linéaires:

$$\begin{cases} x - z = & 1 \\ 4x - y - 2z = & 2 \\ -2x + z = & 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - z = & 0 \\ 4x - y - 2z = & 0 \\ -2x + z = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = & 1 \\ x - y - 2z = & 2 \\ 2x - y - z = & 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - z = & 1 \\ 4x - y - 2z = & 2 \\ -2x + 2z = & 0 \end{cases}$$

Exercice 2 Discuter et résoudre les systèmes d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + ay + (a - 1)z = & 0 \\ 3x + 2y + az = & 3 \\ (a - 1)x + ay + (a + 1)z = & a \end{cases} \quad \begin{cases} (1 + a)x + y + z = & 0 \\ x + (1 + a)y + z = & 0 \\ x + y + (1 + a)z = & 0 \end{cases} \quad [Supp]$$

Exercice 3 Résoudre le système linéaire en discutant suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + z + w & = 0 \\ ax + y + (a - 1)z + w & = 0 \\ 2x + ay + z + 2w & = 0 \\ x - y + 2z + aw & = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + by + z & = 1 \\ x + aby + z & = b \\ x + by + az & = 1 \end{cases}$$

Exemple 4 Trouver la matrice inverse associée au système suivant, par la méthode de **Gauss-Jordan**

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{bmatrix}$$

$$[A | \mathbf{I}_n] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [\mathbf{I}_n | A^{-1}] .$$

$$[A | \mathbf{I}_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

Etape I

$$[A | \mathbf{I}_n] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{L_1}{2} \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 6\mathbf{L}_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 8\mathbf{L}_1 \end{bmatrix}$$

Etape II

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}\mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1\mathbf{L}_2 \end{bmatrix}$$

Etape III

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \frac{\mathbf{L}_3}{(-1)} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - 4\mathbf{L}_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (-6)\mathbf{L}_3 \\ \mathbf{L}_3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -\frac{9}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightsquigarrow [\mathbf{I}_3 | A^{-1}]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{9}{2} & 4 \\ 3 & 7 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$