Examen

Exercice 01 (4pts) : Grammaires & langages

1. Soit la grammaire G = ({a, b, c} , {S, A,B} , S , P) ; où P contient les règles suivantes :
   S → aS | aA ; A → bB | ε ; B → bA
   - Donner 4 mots qui sont générés par G (justifier)
     Exemple d'un mot : 'aabbbb'
     S → aS→ aaA→ aabB → aabbA→ aabbbB→ aabbbbA→ aabbbb ∈ L(G)
   - Trouver le langage généré par G (qu'on note L(G)).

   L(G)={w∈{*a*, *b*,}*/*w*= $a^n a(bb)^m$ *n*,*m*≥0 }

2. Donner une grammaire pour exprimer le langage suivant :
   - L ={w∈{*a*, *b*, *c*}*/*w*=$a^{2n}ccb^{n+1}$ $n\geq0$ ou $w=b^n a^m$ $n>m\geq0$}
     L ={w∈{*a*, *b*, *c*}*/*w*=$\mathbf{(aa)}^n ccb\mathbf{b^n}$ $n\geq0$ ou $w=b^{i+m}a^m$ $i>0$, $m\geq0$}
     L ={w∈{*a*, *b*, *c*}*/*w*=$\mathbf{(aa)}^n ccb\mathbf{b^n}$ $n\geq0$ ou $w=b^i\mathbf{b^m a^m}$ $i>0$, $m\geq0$}
     L ={w∈{*a*, *b*, *c*}*/*w*=$\mathbf{(aa)}^n ccb\mathbf{b^n}$ $n\geq0$} ∪ {w∈{*a*, *b*, *c*}*/*w*=$b^i\mathbf{b^m a^m}$ $i>0$, $m\geq0$}
     Donc la grammaire comme suit :
     G = ({a, b, c} , {S, A , B, C} , S , P)
     Ou P={ S → A | B ; A → aaAb | ccb ; B → bB | bC ; C → bCa | ε ;}

Exercice 02 (5pts) : Expressions régulières & Automates

1. Pour chacune des expressions régulières qui suivent, dessinez un automate (sans ε-transitions) reconnaissant le langage qu'elle dénote

L1=(c∗ b + c b∗ a)*(a c +a* b)
1 2 3 4 5 6 7 8 9

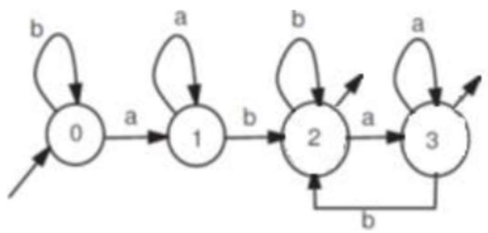
	a	b	c
0	6,8	2,9	1,3
1	-	2	1
2	6,8	2,9	1,3
3	5	4	-
4	5	4	-
5	6,8	9,2	3,1
6	-	-	7
7			
8	8	9	
9			

L2= b(b a∗ b)* + a(c a)*b(a + b a)*

On peut dessiner l'automate directement à partir de l'expression

2. Donner l'expression régulière du langage reconnu par chacun des automates suivants :

Automate A



1^er^ méthode

$EXP_A = b^*aa^*b\ (\ (b+aa^*b)^* + a(a+bb^*a)^*\ )$

2^ième^ méthode (on utilise le système d'équation (lemme de Arden)

$L_0 = bL_0 + aL_1 = b^*aL_1$

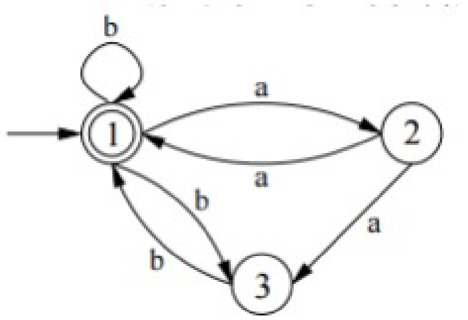
$L_1 = aL_1 + bL_2 = a^*bL_2$

$L_3 = aL_3 + bL_2+\varepsilon = a^*(\ bL_2+\varepsilon)= a^*bL_2+ a^*$

$L_2 = bL_2 + a\mathbf{L_3}+\varepsilon = bL_2 + a(a^*bL_2+ a^*)+\varepsilon = (b+ aa^*b)L_2+ aa^*+\varepsilon =(b+ aa^*b)^*\ (aa^*+\varepsilon)$

On a $L_1 = aL_1 + bL_2 = a^*bL_2$ et $L_2 =(b+ aa^*b)^*\ (aa^*+\varepsilon)$

$L_0 = b^*aL_1= b^*aa^*bL_2=$ $\mathbf{b^*aa^*b(b+ aa^*b)^*\ (aa^*+\varepsilon)}$



Automate B

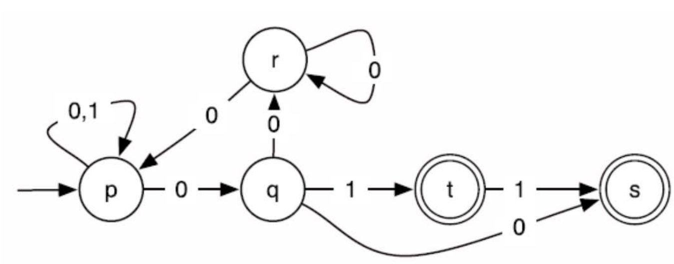
$L_3 = bL_1$

$L_2= aL_1 + aL_3 = aL_1 + abL_1=(a+ ab)L_1$

$L_1 = bL_1 + a\mathbf{L_2} + b\mathbf{L_3}+\varepsilon = bL_1 + a(a+ ab)L_1 + b\ bL_1+\varepsilon = (b+ a(a+ ab)+ b\ b)L_1+\varepsilon =$ $\mathbf{(b+ a(a+ ab)+ bb)^*}$

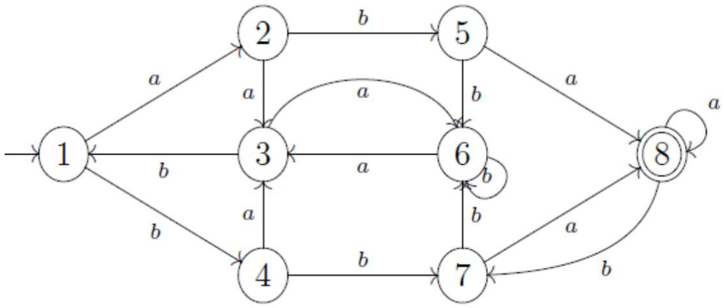
Exercice 03 (4,5pts): Déterminisation & Minimisation

1. Déterminisez l'automate suivant et dessinez le graphe de l'automate obtenu



	0	1
p	p,q	p
p,q	P,q,r,s	p ,t
P,q,r,s	P,q,r,s	p ,t
p,t	p,q	p,s
p,s	p,q	p

2. Minimisez l'automate suivant et dessinez le graphe de l'automate minimal obtenu.



	a	b
1	2	4
2	3	5
3	6	1
4	3	7
5	**8**	6
6	3	6
7	**8**	6
8	**8**	7

E0 : A={1,2 ,3,4,5,6,7} B={8}

E1 : A={1,2 ,3,4,6} B={8}C={5,7}

E2 : A={1,3,6} B={8}C={5,7} D={2,4}

E2 : A={3,6} B={8}C={5,7} D={2,4} E={1}

E2 : A={3} B={8}C={5,7} D={2,4} E={1} F={6}

	a	b
E	D	D
D	A	C
A	F	E
C	B	F
F	A	F
B	B	C

3. Rendre l'automate minimal obtenu complet

L'automate minimal obtenu est complet

Exercice 04 (4pts) : opérations sur les automates

1. Donner un automate qui accepte chacun des langages suivants :
   a. L1 = { $w \in \{a, b\}^*$, tel que w contient un nombre impaire de ***b***}

   b. L2 = { $w \in \{a, b\}^*$, tel que la longueur de ***w*** est paire

   c. L3 = { $w \in \{a, b\}^*$, tel que la longueur de ***w*** est un multiple de 3}

   d. L4 le langage complémentaire de L3.

2. ***<u>Expliquez comment construire</u>*** un automate d'états fini A qui reconnaît chacun des langages suivants
   a. L5 = { $w \in \{a, b\}^*$, tel que *w* contient un nombre impaire de ***b*** et la longueur de ***w*** est paire }

   b. L6 = { $w \in \{a, b\}^*$ et *w* commence par ***a*** et ne contient pas '***ba'*** }

Exercice 05 (2,5pts) : Grammaires algébriques

1. Trouver une grammaire réduite (dont tous les non terminaux sont utiles) équivalente à la grammaire suivante :

   G = ({a,b}, {S,A,B,C} , S , { S → AB | CA ; A → a ; B → BC | AB ; C → aB | b})

On supprime le symbole B (le symbole B **non-productifs**)

La grammaire devient :
G = ({a,b}, {S,A,C} , S , { S → CA ; A → a ; C → b})
tous les non terminaux sont utiles, donc la grammaire est réduite

2. Trouver une grammaire propre équivalente à la grammaire suivante :

   H = ({a,b}, {S,A,B} , S , { S → ASB | ε ; A → aAS | a ; B → SbS | A | bb})

Render la grammaire propre

Correction

1- Ajouter la règle : S' → S (S' nouvelle axiome)

On obtient

S' → S

S → ASB | ε ; A → aAS | a ; B → SbS | A | bb

2- Elimination de : S → ε

La grammaire obtenue est :

S' → S| ε

S → ASB | AB ; A → aA| aAS | a ; B → SbS| bS | Sb | b| A | bb

3- Elimination les règles unitaires : B → A

La grammaire devient :

S' → S| ε

S → ASB | AB ;

A → aA| aAS | a ;

B → SbS| bS | Sb | b| aA| aAS | a | bb

La grammaire obtenue est une grammaire propre

Bon courage