TD 01_*correction*

Exercice 01 : *Construction de nouveaux ensembles*

Soient $E_1 = \{a, b\}$, $E_2 = \{b, c, d\}$, P(E) est l'ensemble des parties de E et $E = \{a, b, c, d\}$. Calculer :

1. $E_3 = E_1 \cap E_2 =$ **$\{b\}$** ;
2. $E_4 = E_1 \cup E_2 =$ **$\{a, b, c, d\}$** ;
3. $E_5 = E_2 - E_1 =$ **$\{c, d\}$** ;
4. $E_6 = \overline{E_1} =$ **$\{c, d\}$** ;
5. $E_7 = \overline{E_2} =$ **$\{a\}$** ;
6. $E_8 = E_5 \cup E_6 =$ **$\{c, d\}$** ;
7. $E_9 = E_1 \times E_2 =$ **$\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(b,d)\}$**
8. $E_{10} = E_3 \times E_4 =$ **$\{(b, a),(b, b),(b, c),(b, d)\}$;**
9. $E_{11} = E_5 \times E_7 =$ **$\{(c, a),(d, a)\}$**
10. $E_{12} = P(E_1) =$ **$\{\phi,\{a\},\{b\},\{a, b\}\}$**
11. $E_{13} = P(E_2) =$ **$\{\phi,\{b\},\{c\},\{d\},\{b, c\},\{b, d\},\{c, d\}\{b, c, d\}\}$**
12. $E_{14} = E_{12} \cap E_{13} =$ **$\{\phi,\{b\}\}$**

Exercice 02 : Alphabet
Pour chacun des mots (ou phrases) suivants (suivantes) donnez un alphabet :

1. 101000100 (*codage binaire*)
2. 256150100 (*codage d'un pixel selon la méthode RVB*)
3. 18.75 (*Note entre 0 et 20*)
4. -5.25 (*Température entre -70 et 60*)
5. if (a>b){ a++ ; } (*Un code en langage C*)
6. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ (*Formule mathématique*)

Exercice 03 : mots
Soit le mot $x = ((acbc)^R.baca)^R$

1. Donner la chaîne de caractères à laquelle x est égal. ***x=acabacbc***
2. Quelle est la valeur de $|x|$, $|x|_a$, $|x|_b$ et $|x|_c$?
   $|x|=8$, $|x|_a=3$, $|x|_b=2$ et **$|x|_c=3$**
3. Donner un *préfixe* de ***x*** contenant au moins deux lettres '***c***'.
   acabac
4. Donner un *suffixe* de ***x*** contenant une seule lettre '***a***'.
   acbc

Exercice 04 : mots -langages
Pour chacun des langages suivants, donner des exemples de mots contenus dans chacun des langages :

1) $L_1 = \{ w \in \{a, b, c\}^* \ / \ w$ *commence* par la lettre 'a' } ;
   $L_1 = \{a, aa, ac, ab, abb, acb, acc, aba, aaa, ...\}$
   Exp=$a(a+b+c)^*$

2) $L_2 = \{ w \in \{a, b, c\}^* /\ w$ se *termine* par la lettre 'a' $\}$;

L_2 = { a, aa, ba, ca, cba, bca, aaa, bba, cca, ... }

Exp= (a+b+c)*a

3) $L_3 = \{ w \in \{a, b, c\}^* /\ w$ *contient au moins une* occurrence de la lettre 'a' $\}$;

L_3 = { a,aa, ba, ab, ac, ca, cab, bac, bba, aab ... }

Exp= (a+b+c)*a(a+b+c)*

4) $L_4 = \{ w \in \{a, b, c\}^* /\ w$ *contient au moins deux* occurrences la lettre 'a' $\}$;

L_4 = { aa, aba, aab,aca, caa, aac,acaab,... }

Exp= (a+b+c)*a(a+b+c)* a(a+b+c)*

5) $L_5 = \{ w \in \{a, b, c\}^* /\ w$ *contient au moins deux occurrences consécutives* de la lettre 'a' $\}$

L_5 = { aa, baaa,bacaab, aaa, aabc, ... }

Exp= (a+b+c)*aa(a+b+c)*

6) L_6 : Ensemble des mots construits sur l'alphabet $\{a, b\}$, *commençant* par des ***a*** et se *terminant* par des ***b*** et tel que le nombre de ***a*** et le nombre de ***b*** soit égal

L_6 = { ab, abab, abbaab, abababb ,... }

Exp= *impossible* (*le langage n'est pas régulier* **)**

Exercice 05 : Construction de langages

1. Donnez le langage L_1 des mots de longueur 2 définis sur l'alphabet $\{a, b\}$.
2. Donnez le langage L_2 des mots de longueur 2 définis sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ contenant un a ou un b mais pas les deux.
3. Donnez le langage L_3 des mots tel que $L_3 = L_1.L_2$.
4. Donnez le langage L_4 des mots tel que $L_4 = (L_1.L_2).L_3$.
5. Donnez le langage L_5 des mots tel que $L_5 = L_1.(L_2.L_3)$.
6. Donnez le langage L_6 des mots tel que $L_6 = L_3.(L_1.L_2)$.
7. Donnez le langage L_7 des mots tel que $L_7 = L_1 | L_2$.
8. Donnez le langage L_8 des mots tel que $L_8 = L_1 \cap L_2$.
9. Donnez le langage L_9 de tous les mots définis sur l'alphabet $\{a, b\}$.

Exercice 06 : Langages

Sur l'alphabet A = $\{a, b\}$, on considère le langage L_1 des mots formés de ***n*** fois la lettre ***a*** suivi de ***n*** fois la lettre ***b***, et le langage L_2 des mots comportant autant de ***a*** que de ***b***.

- Définir formellement ces deux langages.

  - ✓ $\mathbf{L_1 = \{ w \in \{a, b\} / w = a^n b^n ; n \in \mathbb{N} \}}$
  - ✓ $\mathbf{L_2 = \{ w \in \{a, b\} /|w|_a = |w|_b \}}$

- Que sont les langages suivants : $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, L_1^2, $(L_2)^2$?

  - ✓ $\mathbf{L_1 \cup L_2 = L_2}$ (*car* $\mathbf{L_1 \subset L_2}$)
  - ✓ $\mathbf{L_1 \cap L_2 = L_1}$ (*car* $\mathbf{L_1 \subset L_2}$)
  - ✓ $\mathbf{(L_1)^2 = \{ a^n b^n a^m b^m \ / \ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N} \}}$

✓ $(L_2)^2 = L_2$

- Que peut-on dire de $L_1{}^*$ et $L_2{}^*$ par rapport à L_1 et L_2 ?

✓ **L1 ⊂ (L1)* ⊂ L2**

✓ **(L2)*= L2**

Exercice 07 : langages

Sur l'alphabet A = {0, 1}, on considère les langages L_1, L_2, L_3 et L_4 définis par

$L_1 = \{01^n / n \in \mathbb{N}\}$ $L_2 = \{0^n1 / n \in \mathbb{N}\}$

$L_3=\{00,11\}$ $L_4=\{0, 1, 01\}$

Définir les langages L_1L_2, $L_1 \cap L_2$ et $(L_1)^2$, $L_3.L_4$

✓ **L1L2= {01n0m1/n,m ∈ N}**

✓ **L1 ∩ L2={01}**

✓ **(L1)2= {01n01m /n,m ∈ N}**

✓ **L3.L4={000, 001, 0001, 110, 111, 1101}**

Exercice 08 : Jeux appartenance d'un mot à un langage

1. Soient les deux expressions régulières suivantes :
   - $R1 = a(ab)^*ba$
   - $R2 = (ab)^*(ba)^*(a^*b^*)$

a) Donnez un mot $m_1 \in L(R1) \wedge m_1 \notin L(R2)$. m_1= ***aabba***

b) Donnez un mot $m_2 \in L(R2) \wedge m_2 \notin L(R1)$. m_2= ***ba***

c) Donnez un mot $m_3 \in L(R1) \wedge m_3 \in L(R2)$. m_3= ***aba***

d) Donnez un mot $m_4 \notin L(R1) \wedge m_4 \notin L(R2)$. m_4= ***aabbab***

2. Soient les deux expressions régulières suivantes :

– $S1 = a(a|b)^*ba$

– $S2 = (ab)^*|(ba)^*|(a^*|b^*)$

a) Donnez un mot $m_1 \in L(S1) \wedge m_1 \notin L(S2)$. m_1=***aaba***

b) Donnez un mot $m_2 \in L(S2) \wedge m_2 \notin L(S1)$. m_2=***b***

c) Donnez un mot $m_3 \in L(S1) \wedge m_3 \in L(S2)$. m_3= ***il n'existe pas***

d) Donnez un mot $m_4 \notin L(S1) \wedge m_4 \notin L(S2)$. m_4= ***baa***

3. Soient les deux expressions régulières suivantes :

– $RS1 = (a|b)^*b$

– $RS2 = [(a|b)(a|b)]^*$

a) Donnez pour $RS1$ et $RS2$ les expressions régulières dénotant les langages compléments de L($RS1$) et L($RS2$).

✓ $\boldsymbol{RS1 = (a|b)^*a}$ **/ε**

✓ $\boldsymbol{RS2 = [(a|b)(a|b)]^*(a/b)}$

Exercice 09 . : Jeux expression régulière dénotant un langage

Nous gardons le même principe de l'exercice précèdent .

1. Trouvez une expression régulière ER 1 dénotant l'ensemble des mots sur l'alphabet A = {a,b, c}.
   ER 1 =(a+b+c)*

2. Trouvez une expression régulière ER 2 dénotant l'ensemble des mots non vides sur l'alphabet A = {a, b, c, d }.
   ER 2 =(a+b+c+d)(a+b+c+d)*

3. Trouvez une expression régulière ER 3 dénotant l'ensemble des mots non vides commençant par ***c*** et se terminant par ***a*** sur l'alphabet A = {a, b, c, d }.
   ER 3 =c(a+b+c+d)*a

4. Trouvez une expression régulière ER 4 dénotant l'ensemble des entiers naturels codés sur l'alphabet A = {0, 1, 2, . . . , 9}
   ER 4 = 0+(1+2+...+9)(0+1+2+...+9)*

5. Trouvez une expression régulière ER 5 dénotant l'ensemble des mots sur l'alphabet A = {a,b, c}:
   – Comportant exactement deux a.
   – Tout b est suivi d'au moins deux c.
   – Se termine par a.

   ER 5 = (bcc+c)*a(bcc+c)*a

Exercice 10 :

Donnez une expression régulière qui accepte chacun des langages suivants (définis sur l'alphabet A = {0, 1}) :

1. L'ensemble {0 , 1 }

   (0+1)

2. l'ensemble de toutes les chaînes constituées d'un nombre quelconque (éventuellement nul) de 0 ou de 1.

   (0+1)*

3. Toutes les chaînes qui se terminent par 00.

   (0+1)* 00

4. l'ensemble { 00 , 01 ,10 , 11 }, c'est à dire l'ensemble des chaînes de 0 et de 1 de longueur deux.

   00+01+10+11 ou bien **(0+1)(0+1)**

5. l'ensemble constitué de la chaîne a et de toutes les chaînes commençant par un nombre quelconque (éventuellement nul) de 0 et se terminant par un 1 .

   0*(0+1)*1

6. Ensemble de toutes les chaînes dans lesquelles chaque paire de 0 apparaît devant une paire de 1.

   (1+01+0011)*(ε+0)

7. Ensemble de toutes les chaînes ne contenant pas 101.

   (0+11*00)*(ε+11*+11*0)

8. Tous les nombres binaires divisibles par 4.

   (0+(0/1)*00)

Exercice 11

Soit l'alphabet A = {a,b},

Donner les expressions régulières correspondantes aux langages suivants :

1. L1 = { ε, a, b, ab}

   EX1= (ε+a+ b+ ab)

2. L2 = {b^n / n>=2, n étant un entier}

   EX2= bbb*

3. L3 = {w ∈ {a,b}*, tel que w contient seulement 3b, le reste c'est des a's}

   EX3= a*ba*ba*ba*

4. L4 = {w ∈ {a,b }*, tel que w contient un nombre de ***a*** *divisible* par 3}

   EX 4 = (b*ab*ab*ab*)*+b*

5. L5 = {w ∈ {a,b}*, tel que w contient un nombre paire de a}

   EX 5 = (b*ab*ab*)*=b*(ab*a)*b*= (b+ab*a)*

6. L6 = {w ∈ {a,b}*, tel que w contient un nombre impaire de b}

   EX 6 = a*b(a*ba*ba*)*=a*b(a+ba*b)*

7. L7 = {w ∈ A *, w ne contient pas 3b consécutifs}

   EX 7 = (a+ba+bba)*(ε +b+bb)

8. L8 = {w ∈ {a,b}*, tel que w *contient* la sous chaîne ***aaa*** ou la sous chaîne ***bbb*** mais *pas les deux* en même temps}

   On a **L8=L9+L10**

   L9= w *contient* la sous chaîne ***aaa*** mais *pas* la sous chaîne ***bbb***

   L10= w *contient* la sous chaîne ***bbb*** mais *pas* la sous chaîne ***aaa***

   EX 8 = EX 9+ EX 10

   =[(a+ba+bba)*(ε+b+bb)aaa(a+ba+bba)*(ε+b+bb)]+

   [(b+ab+aab)*(ε +a+aa)bbb(b+ab+aab)*(ε +a+aa)]